2010年度 修士論文

射影線織曲面のイデアル自由分解について

早稲田大学基幹理工学術院 修士課程2年
5109A003-1
石井 晋平
指導教員名 楫 元

Abstract 本論文は, ruled surface を適当な射影空間に埋め込んだ上で, その ideal sheaf の free resolution を Beilinson theorem を用いて調べたものである. 計算機によるアルゴリズムを用いて具体的な ruled surface について free resolution を計算する方法は知られているが, より一般的な手計算による手法を与えた. また具体例として, この手法を使って楕円曲線上で次数 0 の locally free sheaf が作る ruled surface の free resolution を求めた.

Contents

1 Introduction

基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ とし, 曲線はすべて非特異かつ射影的なものとする.

曲線上の $\mathbb{P}^1$-束を ruled surface という. 曲線上の rank 2 の locally free sheaf の射影化として定義することもできる. Ruled surface を適当な very ample divisor によって射影空間に埋め込み, ideal sheaf を考える. Alzati and Tonoli [AT] はこの ideal sheaf の free resolution を計算する Macaulay 2 のアルゴリズムを与えた.

Theorem 1.1 C を種数 g の曲線, $\mathfrak{b}$ を C 上の divisor, $\mathscr{L}$ を C 上の line bundle とする. $\mathscr{E}$ を C 上の rank 2 normalized locally free sheaf で $0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$ を満たすものとし, 整数 k に対し divisor $A = kC_0 + \mathfrak{b}f$ が ruled surface $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ 上で very ample とする.

このとき射影空間に $|A|$ で埋め込んだ X の ideal sheaf $\mathscr{I}_X$ の free resolution を計算するアルゴリズムが存在する.

このアルゴリズムでは, 次のような手順で free resolution を計算している.

1. 与えられた種数を持つ曲線を無作為に取る
2. 与えられた次数と構造を持つ locally free sheaf を無作為に取って ruled surface を定める
3. 与えられた very ample divisor で射影空間に埋め込む
4. 埋め込まれた ruled surface の ideal sheaf の free resolution を計算する

[AT] では, このアルゴリズムを使って実際にいくつかの例について計算している. 実際に実験してみると, 得られた free resolution は曲線と locally free sheaf の無作為な選び方によらず一意的であることがわかる. つまり, 曲線の種数, locally free sheaf の次数と構造, very ample divisor を与えれば, minimal free resolution は一意的に定まるはずである. しかし, アルゴリズムによる計算ではこれを証明することはできない.

そこで本論文では, [AT] の結果を一般化し, 計算機を使わない手法で ruled surface の free resolution を調べる. Beilinson [B] の spectral sequence と, その発展形である Eisenbud, Floystad, Schreyer [EFS] の Beilinson monad を利用する. (これらの定理を Beilinson theorem と呼ぶことにする.) これら定理は大雑把に言えば, ある coherent sheaf の cohomology の情報から, その coherent sheaf を含む exact sequence を与えるというものである.

Free resolution の計算の具体的な手順は

(手順 1) Ruled surface を適当な very ample divisor で射影空間に埋め込む

(手順 2) Twisted ideal sheaves の cohomology の次元を計算する

(手順 3) Beilinson theorem を適用し計算することで, differential sheaf を含んだ resolution を得る

(手順 4) Differential sheaf の free resolution を使って, (手順 3) で得た resolution を free にする

の 4 つである.

この手法を C が楕円曲線, $\mathscr{E}$ が次数 0 の locally free sheaf, very ample divisor が $A = C_0 + 3f$ という射影空間に埋め込まれた ruled surface に対して適用し, free resolution を計算できることを確認したのが主結果である.

Main result C を種数 $g=1$ の曲線, $\mathscr{E}$ を C 上の rank 2, 次数 0 の normalized locally free sheaf とする．$X=\mathbb{P}(\mathscr{E})$ を very ample divisor $A=C_0+3f$ によって $\mathbb{P}^5$ に scroll として埋め込み, ideal sheaf $\mathscr{I}_X$ を考える．(C_0 を tautological section, f を fibre とする．詳しくは Definition 2.4 を参照せよ．)

このとき, 上記の手順によって

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-6) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-5)\oplus 6\mathscr{O}(-4) \longrightarrow 15\mathscr{O}(-4)\oplus 18\mathscr{O}(-3) \longrightarrow 20\mathscr{O}(-3)\oplus 3\mathscr{O}(-2) \longrightarrow \mathscr{I}_X \longrightarrow 0$$

という free resolution が成り立つ. ($\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}$ を $\mathscr{O}$ と省略した.)

一方, [AT] でも同じ設定のもとでアルゴリズムを用いて ruled surface の free resolution を計算している (Example 3.1)．そこでは主結果よりも無駄のない free resolution を得ているだけでなく, $\mathscr{E}$ の構造によって 3 つに場合分けし, それぞれで異なる free resolution になることも示している．つまり主結果には改善の余地があるが, 力不足により [AT] の Example 3.1 にくらべると無駄のある結果になってしまった.

その結果, 目標であった曲線の種数, locally free sheaf の次数と構造, very ample divisor を与えれば, minimal free resolution が一意的に定まることは示せなかった．しかし, 曲線の種数, locally free sheaf の次数, very ample divisor を固定したときに, ある free resolution の形まで ideal sheaf の resolution を絞れることはわかった．locally free sheaf の構造によって minimal free resolution の形は変わると考えられるが, これらの minimal free resolution を手計算による手順で求めた free resolution は含んでいる.

2 Preliminaries

2.1 Ruled surface

ここでは ruled surface の基礎的な事項を述べる．証明は [H] を参照せよ．

Definition 2.1 (Ruled surface) C を種数 g の曲線とする．X が ruled surface とは, 全射 $\pi : X \to C$ があって, 任意の点 $y \in C$ に対して $X_y := \pi^{-1}(y)$ を fibre とすると, $X_y \cong \mathbb{P}^1$ となり, π は section を持つ (i.e. ある morphism $\sigma : C \to X$ が存在し, $\pi \circ \sigma = id_C$ を満たす) ことである．

Proposition 2.2 $\pi : X \to C$ を ruled surface とすると, ある C 上の rank 2 locally free sheaf $\mathscr{E}$ が存在して $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ となる．逆に, このような $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ はすべて C 上の ruled surface である．さらに, C 上の rank 2 locally free sheaves $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ に対して $\mathbb{P}(\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(\mathscr{E}')$ となることと, ある C 上の invertible sheaf $\mathscr{L}$ が存在して $\mathscr{E}' \cong \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}$ となることは同値である．

Proposition 2.3 $\pi : X \to C$ を ruled surface とすると, 以下を満たす $\mathscr{E}$ で $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ と表せる: $H^0(\mathscr{E}) \neq 0$ かつ $\deg \mathscr{L} < 0$ を満たす任意の invertible sheaf $\mathscr{L}$ に対して $H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) = 0$.
さらにこの場合, ある section $\sigma_0 : C \to X$ が存在してその像を C_0 とすると, $\mathscr{L}(C_0) \cong \mathscr{O}_X(1)$ となる．

Definition 2.4 Locally free sheaf $\mathscr{E}$ が normalized であるとは, $\mathscr{E}$ が Proposition 2.3 を満たすことである．このとき $\mathscr{E}$ は一意的には定まらないが, $\deg \mathscr{E}$ は定まる．この場合, 整数 $e = -\deg \mathscr{E}$ が X の invariant である．また, C_0 を Proposition 2.3 を満たすもの (tautological section という), f を fibre とすると

$$\mathrm{Pic}X = \{aC_0 + \mathfrak{b}f \mid a \in \mathbb{Z}, \mathfrak{b} \in \mathrm{Pic}C\}, \mathrm{Num}X = \{aC_0 + bf \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

と表せる. ただし, $\mathfrak{b}f$ は X 上の divisor $\pi^*\mathfrak{b}$ を表す.

Lemma 2.5 K を ruled surface X の canonical divisor とすると, つぎのように表せる.

$$K \equiv -2C_0 + (2g - 2 - e)f$$

Definition 2.6 Scroll とは 射影空間に埋め込まれた ruled surface で, すべての fibres f の次数が 1 なものである.

2.2 Theorems

ここでは resolution の計算に必要な定理を述べる．まず計算の核となる Beilinson [B] による spectral sequence の定理である．

Theorem 2.7 $\mathbb{P}^n$ 上の coherent sheaf $\mathscr{F}$ に対して, E_1-term が

$$E_1^{pq} = H^q(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{-p}(-p)$$

で与えられる supectral sequence E_r^{pq} が存在して E_∞-term が次を満たす.

$$\begin{cases} E_\infty^{pq} = 0 & (p + q \neq 0) \\ E_\infty^{-pp} = F_p/F_{p+1} & (0 \leq p \leq n) \end{cases}$$

($\mathscr{F}$ のある filtration を $\mathscr{F} = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} = 0$ とする.)

次に, Beilinson spectral sequence の発展形として Eisenbud, Floystad and Schreyer [EFS] による Beilinson monad の定理を述べる.

Theorem 2.8 $\mathbb{P}^n$ 上の coherent sheaf $\mathscr{F}$ に対して

$$B^e = \bigoplus_j H^j(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(e-j)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{j-e}(j-e)$$

となるような complex

$$\mathscr{B} : \cdots \longrightarrow B^{-1} \longrightarrow B^0 \longrightarrow B^1 \longrightarrow \cdots$$

が存在し, $\mathscr{B}$ は B^0 を除いて exact であり, B^0 での homology は $\mathscr{F}$ である. 上記 $\mathscr{B}$ のような, 一カ所を除いて exact である complex のことを monad という.

Remark B^e は Theorem 2.7 の E_1^{pq} に対して

$$B^e = \bigoplus_j E_1^{e-j,j}$$

が成り立つ. つまり B^e は E_1^{pq} の $p+q=e$ となる対角線で直和を取ったものである.

以下, 計算に必要な諸定理を述べる.

Theorem 2.9 ([BL]) X を楕円曲線 C 上の invariant e ruled surface, $D \equiv aC_0 + bf$ を X 上の divisor とし, $a \geq 1$ とする. このとき, D が very ample であることと次は同値である.

$$b > \begin{cases} 1 - a/2 & (e = -1 \text{ and } a \geq 4) \\ ae + 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Proposition 2.10 ([H]) Ruled surface X 上の divisor D に対し, $D.f \geq 0$ とする. このとき任意の $i \geq 0$ に対して $H^i(X, \mathscr{L}(D)) \cong H^i(C, \pi_* \mathscr{L}(D))$ となる.

Lemma 2.11 ([H]) $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}''$ を locally free sheaves とし, $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ を exact とする. 任意の r に対して, $S^r(\mathscr{F})$ の filtration $S^r(\mathscr{F}) = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_r \supseteq F_{r+1} = 0$ が存在して, $F_p/F_{p+1} \cong S^p(\mathscr{F}') \otimes S^{r-p}(\mathscr{F}'')$ が成り立つ. また同様の命題が $\wedge^r \mathscr{F}$ に対しても成り立つ.

Theorem 2.12 (Kodaira vanishing) X を n 次元非特異射影多様体とし, $\mathscr{L}$ を X 上の ample invertible sheaf, ω を X の canonical sheaf とすると, 次が成り立つ.
(1) $H^i(X, \mathscr{L} \otimes \omega) = 0$ for $i > 0$;
(2) $H^i(X, \mathscr{L}^{-1}) = 0$ for $i < n$.

Theorem 2.13 (Riemann-Roch) X を surface, D を X 上の divisor, K_X を X の canonical divisor, p_a を X の算術種数とすると, 次が成立する.

$$h^0(X, D) - h^1(X, D) + h^2(X, D) = \frac{1}{2} D.(D - K_X) + 1 + p_a$$

Theorem 2.14 ([But]) $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ を楕円曲線上の ruled surface とする．$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1)$ を X 上の very ample divisor として, 射影空間に scroll として埋め込む．このとき, X は projectively normal である.

Definition 2.15 (mapping cone) $\mathscr{B}.$, $\mathscr{C}.$ を complexes, $f : \mathscr{B}. \to \mathscr{C}.$ を complex 間の写像とする．つまり

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{B}. = & \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_B} & B_n & \xrightarrow{d_B} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\
\mathscr{C}. = & \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_C} & C_n & \xrightarrow{d_C} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

とする．このとき

$$cone(f) = \cdots \longrightarrow B_n \oplus C_{n+1} \longrightarrow B_{n-1} \oplus C_n \longrightarrow B_{n-2} \oplus C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$
$$d(b, c) = (-d_B(b), d_C(c) - f(b))$$

で定義される complex を mapping cone という.

Lemma 2.16 $\mathscr{B}.$, $\mathscr{C}.$ を complexes, $f : B. \to C.$ を complex 間の写像とする．任意の n に対して $H_n(B.) = H_n(C.)$ ならば, mapping cone $cone(f)$ は exact になる.

3 Example

この章では [AT] で紹介されている, $g=1$, $\deg\mathscr{E}=0$ の ruled surface を scroll として埋め込んだ具体例を, Beilinson spectral sequence と Beilinson monad という 2 種類の手法で計算する.

Example 3.1 ([AT]) C を種数 $g=1$ の楕円曲線, $\mathscr{E}$ を rank 2 次数 0 の normalized locally free sheaf とする. このとき $\mathscr{E}$ は以下のうちのいずれかである.

1. $\mathscr{E}=\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{O}_C$ i.e. $\mathbb{P}(\mathscr{E})=C\times\mathbb{P}^1$;
2. $\mathscr{E}=\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{L}$, where $\mathscr{L}\neq\mathscr{O}_C$ and $\deg\mathscr{L}=0$;
3. non-trivial extention $0\longrightarrow\mathscr{O}_C\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{O}_C\longrightarrow 0$.

それぞれに対応する ruled surface $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ を X_i $(i=1,2,3)$ と表すことにする. 各 X_i は very ample divisor $A=C_0+3f$ によって scroll surface として $\mathbb{P}^5$ に埋め込まれる. このときアルゴリズムを利用して各 X_i の free resolution を計算すると

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-5)\longrightarrow 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\oplus 9\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-4)\longrightarrow 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)\oplus 4\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\longrightarrow\mathscr{I}_{X_1}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-5)\longrightarrow 9\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-4)\longrightarrow 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)\oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\longrightarrow\mathscr{I}_{X_2}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-5)\longrightarrow 9\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-4)\longrightarrow 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\longrightarrow 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)\longrightarrow\mathscr{I}_{X_3}\longrightarrow 0$$

となる. □

3.1 Cohomology の計算

この節では Beilinson theorem を使う準備として cohomology の計算をする.

(手順 1) 各 X_i を very ample divisor $A=C_0+3f$ によって $\mathbb{P}^5$ に scroll として埋め込む

Scroll として埋め込むには $A=C_0+bf$ が very ample となる必要がある. Theorem 2.9 より $b>2$ である. よって, $A=C_0+3f$ とすればよい. また, Proposition 2.10 より $h^0(X,A)=h^0(C,S^1(\mathscr{E})\otimes\mathscr{O}_C(3))=6$ となるので, $\mathbb{P}^5$ に埋め込まれる.

(手順 2) $h^q(\mathbb{P}^5,\mathscr{I}_{X_i}(2+p))$ を計算する

$\mathscr{I}_{X_i}(2)$ に対して Beilinson theorem (Theorem 2.7, 2.8) を適用するので, $E_1^{pq}=H^q(\mathbb{P}^5,\mathscr{I}_{X_i}(2+p))\otimes\Omega^{-p}_{\mathbb{P}^5}(-p)$ の cohomology の次元を計算しなければいけないからである. $-5\leq p\leq 0$, $0\leq q\leq 5$ の範囲で考えればよい. (この範囲の外では H^q または $\Omega^{-p}_{\mathbb{P}^5}(-p)$ が 0 となる)

$m=2+p$ とおく. Exact sequence $0\to\mathscr{I}_{X_i}(m)\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(m)\to\mathscr{O}_{X_i}(m)\to 0$ より

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathscr{I}_{X_i}(m)) & \longrightarrow & H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(m)) & \longrightarrow & H^0(\mathscr{O}_{X_i}(m)) \\
 & \longrightarrow & H^1(\mathscr{I}_{X_i}(m)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(\mathscr{O}_{X_i}(m)) \\
 & \longrightarrow & H^2(\mathscr{I}_{X_i}(m)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^2(\mathscr{O}_{X_i}(m)) \\
 & \longrightarrow & H^3(\mathscr{I}_{X_i}(m)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \longrightarrow & H^4(\mathscr{I}_{X_i}(m)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \longrightarrow & H^5(\mathscr{I}_{X_i}(m)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

これより任意の m で $H^4(\mathscr{I}_{X_i}(m))=H^5(\mathscr{I}_{X_i}(m))=0$.

(i) $0 \leq m \leq 2$ のとき

まず, $H^j(X, \mathscr{O}_{X_i}(m))$ の次元を調べる. Cohomology の計算のため, Proposition 2.10 を利用する. $D = m(C_0 + 3f)$ とすると $\mathscr{O}_{X_i}(m) = \mathscr{L}(D)$ より $D.f \geq 0$ となり, 任意の j で

$$H^j(X_i, \mathscr{O}_{X_i}(m)) \cong H^j(C, \pi_* \mathscr{L}(D)) = H^j(C, S^m(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3m))$$

が成り立つので, $h^j(C, S^m(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3m))$ を計算すればよい.

Lemma 3.2 $h^j(C, S^m(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3m))$ の値は, 各 $\mathscr{E}$ の構造で計算結果は変わらず次のようになる. (縦軸に $0 \leq j \leq 2$, 横軸に $0 \leq m \leq 2$)

0	0	0
1	0	0
1	6	18

Proof. $\dim(C) = 1$ より, 任意の m に対して $h^2(C, S^m(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3m)) = 0$ となる. 次に, $j = 0, 1$ について計算する.

(i-i) $m = 0$ のとき

$S^0(\mathscr{E}) = \mathscr{O}_C$ より $h^0(C, S^0(\mathscr{E})) = h^0(C, \mathscr{O}_C) = 1$, $h^1(C, S^0(\mathscr{E})) = h^1(C, \mathscr{O}_C) = g(C) = 1$ となる.

(i-ii) $m = 1$ のとき

$S^1(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$ で $0 \to \mathscr{O}_C(3) \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_C(3) \to \mathscr{O}_C(3) \to 0$ より $h^0(C, S^1(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3)) = 6$, $h^1(C, S^1(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3)) = 0$ となる.

(i-iii) $m = 2$ のとき

Locally free sheaf の symmetric product の cohomology を計算するために Lemma 2.11 を利用する. $0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E} \to \mathscr{O}_C \to 0$ に Lemma 2.11 を使って filtration を整理し $\otimes \mathscr{O}(3)$ を twist すると, ある locally free sheaf $\mathscr{F}$ が存在して 2 つの exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(3) \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_C(3) \longrightarrow \mathscr{O}_C(3) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_C(3) \longrightarrow \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_C(3) \longrightarrow \mathscr{O}_C(3) \longrightarrow 0$$

が得られる. これより $h^0(C, S^1(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3)) = 18$, $h^1(C, S^1(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_C(3)) = 0$ となる. $\square$

Remark $\mathscr{E} = \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{O}_C$ と $\mathscr{E} = \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{L}$ の場合も exact sequence の形でそれぞれ $0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E} \to \mathscr{O}_C \to 0$ や $0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$ と表せるので, その上で Lemma 2.11 を使えばよい.

最後に, Lemma 3.2 から $h^j(\mathbb{P}^5, \mathscr{I}_{X_i}(m))$ の値を求める.

Lemma 3.3 $h^j(\mathbb{P}^5, \mathscr{I}_{X_i}(m))$ の値は各 $i = 1, 2, 3$ で変わらず次のようになる. (縦軸に $0 \leq j \leq 5$, 横軸に $0 \leq m \leq 2$)

0	0	0
0	0	0
0	0	0
1	0	0
0	0	0
0	0	3

Proof. Cohomology の long exact sequence より $j=2,3,4,5$ についてはすぐわかる．$j=0,1$ については各 m で $h^0(\mathscr{I}_{X_i}(m))-h^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(m))+h^0(\mathscr{O}_{X_i}(m))-h^1(\mathscr{I}_{X_i}(m))=0$ となる．
$m=0$ のとき, $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5})\cong H^0(\mathscr{O}_{X_i})\cong\mathbb{C}$ より $h^0(\mathscr{I}_{X_i}(m))=h^1(\mathscr{I}_{X_i}(m))=0$
$m\geq 1$ のとき, Theorem 2.14 より X_i は projectively normal なので, $h^1(\mathscr{I}_{X_i}(m))=0$ となる．Lemma 3.2 で $h^0(\mathscr{O}_{X_i}(m))$ がわかり, $h^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(m))$ を計算すると $h^0(\mathscr{I}_{X_i}(m))$ が表のように求まる．
□

(ii)$-3\leq m\leq -1$ のとき

Lemma 3.4 $h^j(\mathbb{P}^5,\mathscr{I}_{X_i}(m))$ の値は各 $i=1,2,3$ で変わらず次のようになる．(縦軸に $0\leq j\leq 5$, 横軸に $-3\leq m\leq -1$)

0	0	0
0	0	0
18	6	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Proof. m が正のときと同様に，まず $H^j(X_i,\mathscr{O}_{X_i}(m))$ の次元を計算する． $\dim X_i=2$ より $j\geq 3$ のとき $H^j(X_i,\mathscr{O}_{X_i}(m))=0$． また Kodaira vanishing (Theorem 2.12) より $j<2$ のとき $H^j(X_i,\mathscr{O}_{X_i}(m))=0$. Riemann-Roch (Theorem 2.13) より

$$h^2(X_i,\mathscr{O}_{X_i}(m))=\frac{1}{2}D(D-K_X)+1+p_a=3m(m+1)$$

(ここで $D=m(C_0+3f)$, $K_{X_i}\equiv -2C_0+(2g-2-e)\equiv -2C_0$, $p_a=-g=-1$)
$H^0(\mathbb{P}^5,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(m))=0$ と cohomology の long exact sequence より, $h^j(\mathbb{P}^5,\mathscr{I}_{X_i}(m))$ の値は表のようになることがわかる． □

3.2 Beilinson spectral sequence による計算

前節で求めた cohomology の表から ideal sheaf の resolution を求める． この節では spectral sequence 型の theorem を用いて計算する．(Spectral sequence については [K] を参照せよ.) これ以降, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}$ を $\mathscr{O}$, $\Omega_{\mathbb{P}^5}$ を Ω と省略して表す.
(手順3) Beilinson sepectral sequence (Theorem 2.7) を用いて differential sheaf を含んだ resolution を求める
$H^3(\mathscr{I}_{X_i}(-3))\cong\mathbb{C}^{18}$ より $E_1^{3,-5}=H^3(\mathscr{I}_{X_i}(-3))\otimes\Omega^5(5)\cong 18\Omega^5(5)$ などと表すことにする. $E_1^{pq}=H^q(\mathscr{I}_{X_i}(2+p))\otimes\Omega^{-p}(-p)$ の表, つまり E_1-term の spectral sequence は次のようになる. (縦軸に $0\leq q\leq 5$, 横軸に $-5\leq p\leq 0$)

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
$18\Omega^5(5)$	$6\Omega^4(4)$	0	0	0	0
0	0	0	$\Omega^2(2)$	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$3\mathscr{O}$

以下, $q=4,5$ の行を省略することにする. $\alpha : 18\Omega^5(5) \to 6\Omega^4(4)$ とすると, E_2-term は

Ker α	Coker α	0	0	0	0
0	0	0	$\Omega^2(2)$	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$3\mathscr{O}$

$\beta : \text{Coker } \alpha \to \Omega^2(2)$ とすると, E_3-term は

Ker α	Ker β	0	0	0	0
0	0	0	Coker β	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$3\mathscr{O}$

E_3-term から E_4-term へは変化なし. $\gamma : \text{Ker } \beta \to 3\mathscr{O}$ とすると, E_5-term は

Ker α	Ker γ	0	0	0	0
0	0	0	Coker β	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	Coker γ

これ以降変化はなしなので, $E_5 = E_\infty$ である.

Beilinson spectral sequence (Theorem 2.7) によると, ある filtration $\mathscr{I}_{X_i}(2) = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_5 \supseteq F_6 = 0$ が存在して

$$\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \gamma = 0$$

$$F_0/F_1 = 0,\ F_1/F_2 = 0,\ F_2/F_3 = 0,\ F_3/F_4 = \text{Coker } \beta,\ F_4/F_5 = 0,\ F_5/F_6 = \text{Coker } \gamma$$

となることがわかる. これを整理すると, 次の 4 本の exact sequences が得られる.

$$0 \longrightarrow 18\Omega^5(5) \xrightarrow{\alpha} 6\Omega^4(4) \longrightarrow \text{Coker } \alpha \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \alpha \xrightarrow{\beta} \Omega^2(2) \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \beta \xrightarrow{\gamma} 3\mathscr{O} \longrightarrow \text{Coker } \gamma \longrightarrow 0 \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow \text{Coker } \gamma \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow 0 \tag{4}$$

さらにこれらを整理する. exact sequence (3) と exact sequence (4) をつなげると

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow 3\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow 0 \tag{5}$$

ここで, exact sequence (2) から complex $0 \to \text{Coker } \alpha \to \Omega^2(2) \to 0$, exact sequence (5) から complex $0 \to 3\mathscr{O} \to \mathscr{I}_{X_i}(2) \to 0$ を取ると, これらの homology は一致する.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \text{Coker } \alpha \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & \Omega^2(2) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & 3\mathscr{O} \arrow[r] & \mathscr{I}_{X_i}(2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

complex 間の縦の写像 $\text{Coker } \alpha \to 3\mathscr{O}$ と $\Omega^2(2) \to \mathscr{I}_{X_i}(2)$ が存在すれば, mapping cone が取れて Lemma 2.16 より

$$0 \longrightarrow \text{Coker } \alpha \longrightarrow \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow 0 \tag{6}$$

という exact sequence が得られる．exact sequence (6) と exact sequence (1) とつなげると

$$0 \longrightarrow 18\Omega^5(5) \longrightarrow 6\Omega^4(4) \longrightarrow \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

となるはずだが, complex 間の縦の写像の存在を示せなかった.

3.3 Beilinson monad による計算

Ideal sheaf の resolution を求める別の方法として, Beilinson monad を利用する.

(手順 3') Beilinson monad (Theorem 2.8) を用いて differential sheaf を含んだ resolution を求める

前の節と同様に $E_1^{pq} = H^q(\mathscr{I}_{X_i}(2+p)) \otimes \Omega^{-p}(-p)$ の表, つまり E_1-term の spectral sequence は次のようになる. (縦軸に $0 \leq q \leq 5$, 横軸に $-5 \leq p \leq 0$)

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
$18\Omega^5(5)$	$6\Omega^4(4)$	0	0	0	0
0	0	0	$\Omega^2(2)$	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$3\mathscr{O}$

ここで

$$B^0 = \bigoplus_j H^j(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(-j)) \otimes \Omega^j(j) = E_1^{0,0} \oplus E_1^{-1,1} \oplus E_1^{-2,2} \oplus E_1^{-3,3} \oplus E_1^{-4,4} \oplus E_1^{-5,5} = 3\mathscr{O} \oplus \Omega^2(2)$$

同様に

$$B^{-1} = 6\Omega^4(4),\ B^{-2} = 18\Omega^5(5)$$

となる．[EFS] による Beilinson monad によれば, complex

$$0 \longrightarrow 18\Omega^5(5) \longrightarrow 6\Omega^4(4) \longrightarrow 3\mathscr{O} \oplus \Omega^2(2) \longrightarrow 0$$

が monad ($B^0 = 3\mathscr{O} \oplus \Omega^2(2)$ 以外で exact) で, B^0 で homology を取ると $\mathscr{I}_{X_i}(2)$ になる．よって

$$0 \longrightarrow 18\Omega^5(5) \longrightarrow 6\Omega^4(4) \longrightarrow 3\mathscr{O} \oplus \Omega^2(2) \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow 0 \tag{8}$$

という exact sequence が得られる．これは前節の exact sequence (7) と同じものであり, 求めたかった sequence が得られた.

(手順 4) differential sheaf の free resolution から (手順 3') で得た resolution を free なものにする

まず defferential sheaf の free resolution を求める．$\mathbb{P}^5$ の Euler sequence $0 \to \Omega \to 6\mathscr{O}(-1) \to \mathscr{O} \to 0$ に Lemma 2.11 を適用すると, $1 \leq p \leq 5$ に対して

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \binom{6}{p}\mathscr{O}(-p) \longrightarrow \Omega^{p-1} \longrightarrow 0$$

が成り立つ．これをつなげると, 求めたい differential sheaf の free resolution が次のようになる.

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-6) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-5) \longrightarrow \Omega^4 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-6) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-5) \longrightarrow 15\mathscr{O}(-4) \longrightarrow 20\mathscr{O}(-3) \longrightarrow \Omega^2 \longrightarrow 0$$

Remark $\mathbb{P}^5$ において $\Omega^5 \cong \mathscr{O}(-6)$ が成立する.

次に resolution (8) を short exact sequence に分解する. $\alpha : 18\Omega^5(5) \to 6\Omega^4(4)$ に対して

$$0 \longrightarrow 18\Omega^5(5) \xrightarrow{\ \alpha\ } 6\Omega^4(4) \longrightarrow \text{Coker } \alpha \longrightarrow 0 \tag{9}$$

$$0 \longrightarrow \text{Coker } \alpha \longrightarrow \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow 0 \tag{10}$$

が成り立つ. Exact sequence (9) に対して defferential sheaf の free resolution を考えると, 次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & 18\mathscr{O}(-1) & \longrightarrow & 18\Omega^5(5) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \rho & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 6\mathscr{O}(-2) & \longrightarrow & 36\mathscr{O}(-1) & \longrightarrow & 6\Omega^4(4) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 6\mathscr{O}(-2) & \longrightarrow & 18\mathscr{O}(-1) & \longrightarrow & \text{Coker } \alpha & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで, 縦の写像 $\rho : 18\mathscr{O}(-1) \to 36\mathscr{O}(-1)$ の存在は $18\mathscr{O}(-1)$ が projective module の sheaf 化であることからわかる. また, $18\mathscr{O}(-1) \to 18\Omega^5(5)$ が全単射であることより, ρ は単射になる. よって, ρ の cokernel を取ることで, $0 \to 6\mathscr{O}(-2) \to 18\mathscr{O}(-1) \to \text{Coker } \alpha \to 0$ が exact になることが示せ, Coker α の free resolution が得られる.

これと同様に, exact sequence (10) に対して defferential sheaf の free resolution を考えると, 次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & \to & 6\mathscr{O}(-2) & \to & 18\mathscr{O}(-1) & \to & \text{Coker } \alpha & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathscr{O}(-4) & \to & 6\mathscr{O}(-3) & \to & 15\mathscr{O}(-2) & \xrightarrow{d_1} & 20\mathscr{O}(-1) \oplus 3\mathscr{O} & \xrightarrow{d_0} & \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} & \to & 0 \\
 & & & & & & & & & \searrow \varphi & \downarrow \psi & & \\
 & & & & & & & & & & \mathscr{I}_{X_i}(2) & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

ここで縦の写像 $f : 18\mathscr{O}(-1) \longrightarrow 20\mathscr{O}(-1) \oplus 3\mathscr{O}$, $g : 6\mathscr{O}(-2) \to 15\mathscr{O}(-2)$ の存在は先ほどと同様に示せる. しかし, それぞれが単射であることは示せないので, 先ほどの図式のように簡単には $\mathscr{I}_{X_i}$ の free resolution は求められない. そこで, 次の 2 つの complexes を図式から取って, mapping cone (Definition 2.15) を利用する.

$$0 \longrightarrow 6\mathscr{O}(-2) \longrightarrow 18\mathscr{O}(-1) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-4) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-3) \longrightarrow 15\mathscr{O}(-2) \longrightarrow 20\mathscr{O}(-1) \oplus 3\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow 0 \tag{12}$$

Complex (11) は $18\mathscr{O}(-1)$ 以外で exact であり, $18\mathscr{O}(-1)$ での homology は Coker α となる. Complex (12) については少々複雑である.

Lemma 3.5 Complex (12) は $20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}$ 以外で exact であり, $20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}$ での homology は Coker α となる.

Proof. $20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}\to \mathscr{I}_{X_i}(2)$ は全射の合成なので, 全射である. よって, $20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}$ 以外で exact となる. 次に, $20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}$ での homology を求める.

$$d_1 : 15\mathscr{O}(-2)\longrightarrow 20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O} \qquad d_0 : 20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}\longrightarrow \Omega^2(2)\oplus 3\mathscr{O}$$
$$\varphi : 20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}\longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \qquad \psi : \Omega^2(2)\oplus 3\mathscr{O}\longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2)$$

とすると, $20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O}$ での homology は,

$$\mathrm{Ker}\ \varphi/\mathrm{Im}\ d_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi/\mathrm{Ker}\ d_0 \cong \mathrm{Ker}\ \psi = \mathrm{Coker}\ \alpha$$

となる. Ker φ/Ker $f \cong$ Ker ψ は次の対応する module の図式から得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\ d_0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\ \varphi & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\ \psi & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\ d_0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{d_0} & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow\varphi & & \downarrow\psi & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ただし, M, M', N を module とし, $d_0 : M\to M'$, $\varphi : M\to N$, $\psi : M'\to N$ をすべて全射とする. □

Lemma 3.5 より complex (11) と (12) は同じ homology を持つので, mapping cone を取り Lemma 2.16 を使うと

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 0 & \to & 6\mathscr{O}(-2) & \to & 18\mathscr{O}(-1) & \to & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & \oplus & \downarrow & \oplus & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathscr{O}(-4) & \to & 6\mathscr{O}(-3) & \to & 15\mathscr{O}(-2) & \to & 20\mathscr{O}(-1)\oplus 3\mathscr{O} & \to & \mathscr{I}_{X_i}(2) & \to & 0
\end{array}$$

つまり

$$0\longrightarrow \mathscr{O}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}(-5)\oplus 6\mathscr{O}(-4)\longrightarrow 15\mathscr{O}(-4)\oplus 18\mathscr{O}(-3)\longrightarrow 20\mathscr{O}(-3)\oplus 3\mathscr{O}(-2)\longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}\longrightarrow 0 \tag{13}$$

が exact sequence になる. 以上より, X_i $(i=1,2,3)$ の ideal sheaf の free resolution が得られた.

3.4 Summary and problems

前節で求まった resolution (13) は $i=1,2,3$ すべてに対して成り立つ. しかし, [AT] の Example 3.1 では, 次のように各 i に対して ideal sheaf の free resolution が異なり, 無駄のない形で得られて

いる.

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow \mathscr{O}(-6) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-5) \longrightarrow 2\mathscr{O}(-3) \oplus 9\mathscr{O}(-4) \longrightarrow 3\mathscr{O}(-2) \oplus 4\mathscr{O}(-3) \longrightarrow \mathscr{I}_{X_1} \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \mathscr{O}(-6) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-5) \longrightarrow 9\mathscr{O}(-4) \longrightarrow 3\mathscr{O}(-2) \oplus 2\mathscr{O}(-3) \longrightarrow \mathscr{I}_{X_2} \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \mathscr{O}(-6) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-5) \longrightarrow 9\mathscr{O}(-4) \longrightarrow 2\mathscr{O}(-3) \longrightarrow 3\mathscr{O}(-2) \longrightarrow \mathscr{I}_{X_3} \longrightarrow 0
\end{gathered}
$$

Resolution (13) をより無駄のない形にするには, complex 間の縦の写像 $f : 18\mathscr{O}(-1) \to 20\mathscr{O}(-1) \oplus 3\mathscr{O}$, $g : 6\mathscr{O}(-2) \to 15\mathscr{O}(-2)$ を具体的に記述し, それぞれの像を調べなければならない.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & \to & 6\mathscr{O}(-2) & \to & 18\mathscr{O}(-1) & \to & \mathrm{Coker}\ \alpha & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathscr{O}(-4) & \to & 6\mathscr{O}(-3) & \to & 15\mathscr{O}(-2) & \to & 20\mathscr{O}(-1) \oplus 3\mathscr{O} & \to & \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} & \to & 0 \\
 & & & & & & & & & \searrow & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & & & \mathscr{I}_{X_i}(2) & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

これらの写像は, [EFS] で得られた resolution (8) の中の写像 $6\Omega^4(4) \to \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O}$ から誘導されている. Differential sheaves の係数部分は twisted ideal sheaf の cohomology を vector space と見たものだったので, 正確に書けば,

$$
H^3(\mathscr{I}_{X_i}(-2)) \otimes \Omega^4(4) \longrightarrow (H^2(\mathscr{I}_{X_i}) \otimes \Omega^2(2)) \oplus (H^0(\mathscr{I}_{X_i}(2)) \otimes \mathscr{O})
$$

である. この写像は各 X_i $(i = 1, 2, 3)$ により変化することがわかる. この各 i での変化が f, g の写像に変化を与え, 各 i で異なる free resolution になるのである.

しかし, この写像の具体的な対応を記述することができなかった. [EFS] で得られた differential sheaf を含む resolution の写像を, 具体的な行列で与えている論文もある ([EFS], [DE]) が, どれも differential sheaf の係数の小さい, 簡単な写像について扱っている. この例の場合, differential sheaf の係数が大きく, 写像を具体的に記述することはできなかった.

当初の目標は曲線の種数, locally free sheaf の次数と構造, very ample divisor を与えたとき, minimal free resolution が一意的に定まることを示したかった. しかし, locally free sheaf の構造の変化 (各 X_i での変化) によってどのように resolution が変わるのかわからなかったため, 目標を達成することは出来なかった.

一方, $g = 1$, $\deg \mathscr{E} = 0$, very ample divisor を $A = C_0 + 3f$ としたときに, free resolution (13) まで ideal sheaf の resolution を絞れることはわかった. この free resolution (13) は [AT] による Example 3.1 のすべての $\mathscr{I}_{X_i}$ の free resolution を含んでいるはずである. $\mathscr{I}_{X_1}$, $\mathscr{I}_{X_2}$ の resolution を含んでいることは明らかだが, $\mathscr{I}_{X_3}$ の resolution は resolution (13) に収まらない. よって, [AT] による $\mathscr{I}_{X_3}$ の free resolution は間違っているのではないかと考えられる.

Acknowledgements

修士論文を執筆するにあたり, 毎週の熱心にセミナーを見ていただき, 数々のご助言をして頂いた, 指導教員の楫 元先生に心より感謝を申し上げます. また, 学部 3 年時にお世話になった前田 英敏先生にもお礼申し上げます.

ご一緒にセミナーをさせていただいた楫研究室の渡辺 究氏, 古川 勝久氏, 石川 大蔵氏からは日々の研究でも多くのご助言を頂きました. 他大学でご活躍中の權業 善範氏, ご卒業された眞鍋 岳氏からも大きな影響をうけました. ここに感謝の意を表します.

References

[ABB] A. Alzati, M. Bertolini, G. M. Besana, Projective normality of varieties of small degree, Comm. Algeb. 25(12) (1997), 3761-3771.

[AT] A. Alzati, F. Tonoli, An explicit construction of ruled surfaces, J. Pure Appl. Algebra (2009), 329-348.

[B] A. Beilinson, Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra, Funct. Anal. Appl. 12 (1978), 214-216.

[But] D. C. Butler, Normal generation of vector bundles over a curve, J. Diff. Geom. 39(1) (1994), 1-34.

[BL] A. Biancofiore, E. L. Livorni. On the genus of a hyperplane section of a geometrically ruled surface, Ann. Mat. Pur. Appl. Ann. Mat. Pa. 147 (1987), 173-185.

[DE] W. Decker, D. Eisenbud, Sheaf algorithm using the exterior algebra, in Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2, Algorithms and Computations in Mathematics 8, Springer, 2001.

[DES] W. Decker, L. Ein, F.-O. Schreyer, Construction of surfaces in $\mathbb{P}^4$, J. of Algebraic Geom. 2 (1993), 185-237.

[E] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Grad. Texts Math. 150, Springer, 1995.

[EFS] D. Eisenbud, G. Floystad, F.-O. Schreyer, Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebras, Trans. Am. Math. Soc. (2003), 4397-4426.

[H] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Grad. Texts Math. 52, Springer, 1971.

[K] 河田敬義, ホモロジー代数, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 1990.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, Vector Bundles on Complex Projective Spaces, Prog. Math. 3, Brikhauser, 1980.

[W] C. A. Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge studies in adv. math. 38, Cambridge univ. press, 1994.