

Beilinson のスペクトル系列を用いた空間曲線の構成

眞鍋岳

2010 年 2 月 9 日

1 準備

与えられた $g \geq 0$ と $d \geq 1$ に対して, 種数が g で, 次数が d となるような $\mathbb{P}^3$ 内の非特異代数曲線を構成したい.

定義 1.1 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を $\text{rank } \mathcal{G} - \text{rank } \mathcal{F} = 1$ を満たす $\mathbb{P}^3$ 上のベクトル束とする. このとき, $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ に対して,

$$C(\varphi) := \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rank } \varphi(x) < \text{rank } \mathcal{F}\}$$

とする.

補題 1.2 (Buchsbaum and Eisenbud) $C(\varphi)$ が非特異代数曲線のとき, ある $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_{C(\varphi)}(m) \rightarrow 0$$

は完全系列である.

定理 1.3 (Beilinson) $\mathcal{S}$ を $\mathbb{P}^n$ 上の連接層としたとき,

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{S}(p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{-p}(-p)$$

であり, $p+q \neq 0$ に対して $E_\infty^{p,q} = 0$ で $\oplus_{q=0}^n E_\infty^{-q,q}$ が $\mathcal{S}$ のフィルター付けに対応する次数付き層となるようなスペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ が存在する.

2 構成法

1. 次数 d , 種数 g となるような非特異代数曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ が存在すると仮定する. $\mathcal{I}_C(3)$ に Beilinson の定理を適用する.

2. Beilinson のスペクトル系列における $E_1^{p,q}$ を d や g を用いて具体的に計算する.
3. Beilinson のスペクトル系列の極限を求めることで, 計算した $E_1^{p,q}$ と $\mathcal{I}_C(3)$ との関係が分かる.
4. $E_1^{p,q}$ を用いて,

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

が完全系列となるように $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を決定する.

5. 次数 d , 種数 g となるような非特異代数曲線が本当に存在するならば, $C(\varphi)$ が非特異代数曲線となるような $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が存在し, $C(\varphi)$ は次数 d , 種数 g となる.

3 次数 6, 種数 3 の場合

$E_1^{p,q}$ は以下の 2 通りが考えられる.

2 次超曲面に入らない					2 次超曲面に入る				
0	0	0	0		0	0	0	0	
$3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$	0	0	0		$3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$	0	0	0	
0	0	0	0		0	0	$\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$	0	
0	0	0	$4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$		0	0	$\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$	$4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$	

ここから次の完全系列がそれぞれ得られる.

$$0 \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

定理 3.1

$$\mathcal{F} = 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1), \mathcal{G} = 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

とする. $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ に対して,

$$C(\varphi) := \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rank } \varphi(x) < \text{rank } \mathcal{F}\}$$

が非特異代数曲線となるとき, その次数は 6 で種数は 3 である.

このような $\varphi \in \text{Hom}(3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ として, たとえば

$$\varphi = \begin{pmatrix} w & x & y \\ x & w & z \\ y & w & x \\ 0 & z & w \end{pmatrix}$$

がある.