

Beilinson のスペクトル系列を用いた空間
曲線の構成

眞鍋岳

早稲田大学大学院基幹理工学研究科
数学応用数理専攻楫元研究室

5108A036-8

2010 年 2 月 3 日

概要

曲線の分類は歴史的にとっても興味深い問題である．特に，次数 d と種数 g を用いて $\mathbb{P}^3$ 内の曲線を分類することは，これまで多くの数学者によって研究されてきたにも関わらず完全には解決していない．

一般に

$$g = \binom{d-1}{2}$$

を満たすような $\mathbb{P}^3$ 内の曲線は，平面曲線として得られる．また， $\mathbb{P}^3$ 内の曲線が平面曲線でなければ

$$g \leq \left(\frac{1}{2}d - 1\right)^2$$

を満たす．このうち，

$$g \leq d - 3$$

となるものについては，非特殊な超平面切断によって $\mathbb{P}^3$ 内に埋め込まれる．しかし，特に高次の場合について，

$$d - 3 < g < \left(\frac{1}{2}d - 1\right)^2$$

となるような d と g に対して， d を次数とし g を種数に持つような曲線が $\mathbb{P}^3$ 内に存在するかどうか完全に明らかにされていない．そのため，特定の次数 d と種数 g を持つような曲線を $\mathbb{P}^3$ 内に構成する手法は，この曲線の存在を直接的に示すという意味で非常に重要である．

この論文では，まず [3] における $\mathbb{P}^4$ 内の曲面の構成法を応用して，特定の次数 d と種数 g をもつ $\mathbb{P}^3$ 内の非特異曲線 C を構成する方法を述べる．この構成法は，Beilinson のスペクトル系列を用いて，曲線 C を定義するようなベクトル束の間の射の存在を示すことによる．

特に，次数 $d = 6$ 種数 $g = 3$ の曲線については，この方法によって二種類の曲線が構成できることを示し，その違いを曲線 C を定義するベクト

ル束の間の射の違いとして明らかにした．本論文によって得られた結論は次の通りである．

定理 0.1

$$\mathcal{F} = 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

$$\mathcal{G} = 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

とする． $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の射 φ が十分一般的にとれたならば，

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < 6\}$$

は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異曲線となり，その次数は 6 で種数は 3 である．

特に， φ が

$$\iota : \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

を同型写像として，

$$\varphi_0 : 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

を用いて，

$$\varphi = (\varphi_0, \iota)$$

と書けるときには， C は 2 次超曲面に入らず，そうでないとき C は 2 次超曲面に入る．

1 構成の手法

まず、次数 d と種数 g をもつ $\mathbb{P}^3$ 内の非特異曲線を構成するための手法を述べる．曲線を構成するために、 $\mathbb{P}^3$ 上のベクトル束 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ で $\mathrm{rk} \mathcal{G} - \mathrm{rk} \mathcal{F} = 1$ となるものを与える．また、 $\varphi \in \mathrm{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ を与える．この、 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi$ を用いて、

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \mathrm{rk} \varphi(x) < \mathrm{rk} \mathcal{F}\}$$

と定める．ここで、

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \mathrm{rk} \varphi(x) < \mathrm{rk} \mathcal{F}\}$$

の余次元は、[1] より 2 以下である． φ として十分に一般的な射を与えれば、余次元が 2 となり、 C は非特異代数曲線となる．

C が非特異代数曲線になるならば、[2] より Eagon-Northcott 複体

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_1(\mathcal{F}) - c_1(\mathcal{G})) \rightarrow \mathcal{O}_C(c_1(\mathcal{F}) - c_1(\mathcal{G})) \rightarrow 0$$

が完全系列となる．一方で $m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m) \rightarrow \mathcal{O}_C(m) \rightarrow 0$$

が完全系列なので、

$$\mathrm{coker} \varphi \cong \mathcal{I}_C(c_1(\mathcal{F}) - c_1(\mathcal{G}))$$

である．すなわち

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_C(c_1(\mathcal{F}) - c_1(\mathcal{G})) \rightarrow 0$$

が完全系列になる．

したがって、求める曲線をこのようにして構成するためには、 $m \in \mathbb{Z}$ として、

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_C(m) \rightarrow 0$$

が完全系列になるようなベクトル束 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ で $\mathrm{rk} \mathcal{G} - \mathrm{rk} \mathcal{F} = 1$ となるものを与えなければならない．このようなベクトル束を構成するため、Beilinson のスペクトル系列を用いる．

定理 1.1 (Beilinson) $\mathcal{S}$ を $\mathbb{P}^3$ 上の接続層とする．このとき，

$$E_1^{p,q} = H^q(E(p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

を満たすスペクトル系列 E で， $p+q \neq 0$ に対して

$$E_{\infty}^{p,q} = 0$$

であり， $\bigoplus_{q=0}^n E_{\infty}^{-q,q}$ が $\mathcal{S}$ のフィルター付けに対応する次数付き層となるようなものが存在する．

次数 d と種数 g を持つような曲線 C が $\mathbb{P}^3$ 内に存在したと仮定して， $\mathcal{I}_C(3)$ にこの定理を適用する．すなわち，そのような曲線が存在するならば，

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(p+3)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

となるようなスペクトル系列について，極限が $\mathcal{I}_C(3)$ を定めるようなものが存在することを利用する．ただし， $-3 \leq p \leq 0$ のとき以外は，

$$\Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p) = 0$$

であり， $0 \leq q \leq 3$ のとき以外は，

$$H^q(\mathcal{I}_C(p+3)) = 0$$

である．したがって， $-3 \leq p \leq 0$ かつ $0 \leq q \leq 3$ について，

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(p+3)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

を考えればよい．

このスペクトル系列から極限 $E_{\infty}^{p,q}$ を導いたとき， $p+q \neq 0$ に対して

$$E_{\infty}^{p,q} = 0$$

であり， $\bigoplus_{q=0}^n E_{\infty}^{-q,q}$ が $\mathcal{I}_C(3)$ のフィルター付けに対応する次数付き層となることから，

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

となるようなベクトル束 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を特定する．さらに $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の射である φ として十分に一般的なものを選べば，

$$\{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < \text{rk } \mathcal{F}\}$$

は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異代数曲線を定め，これは $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の定め方から次数 d と種数 g を持つ．

2 $H^i(\mathcal{I}_C(m))$

Beilinson のスペクトル系列を用いるために，次数 d ，種数 g となるような C が $\mathbb{P}^3$ 内に存在したと仮定して， $0 \leq m \leq 3$ と $0 \leq i \leq 3$ に対して $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ を考える必要がある．ここでは，具体的な次数 d ，種数 g を与える前に， $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ について一般的に分かることを整理する．

まず，完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m) \rightarrow \mathcal{O}_C(m) \rightarrow 0$$

よりコホモロジー群の長完全系列を得る． $\dim C = 1$ なので $H^i(\mathcal{O}_C(m))$ は $1 < i$ で 0 である．また， $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m))$ は $0 < i < 3$ で 0 であり， $-3 \leq m$ のときは $i = 3$ でも 0 である．したがって，

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(\mathcal{I}_C(m)) & \rightarrow & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) & \rightarrow & H^0(\mathcal{O}_C(m)) \\ & & \rightarrow & H^1(\mathcal{I}_C(m)) & \rightarrow & 0 & \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C(m)) \\ & & \rightarrow & H^2(\mathcal{I}_C(m)) & \rightarrow & 0 & \rightarrow 0 \\ & & \rightarrow & H^3(\mathcal{I}_C(m)) & \rightarrow & 0 & \end{array}$$

となる．

これより，

$$H^3(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

が分かる．また，Serre の双対律を用いると，

$$H^2(\mathcal{I}_C(m)) \cong H^1(\mathcal{O}_C(m)) \cong H^0(\omega_C(-m))^\vee$$

が分かる．

次に， $\chi(\mathcal{I}_C(m))$ は

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) - \chi(\mathcal{O}_C(m))$$

であるが，Riemann-Roch の定理より，

$$\chi(\mathcal{O}_C(m)) = \deg(\mathcal{O}_C(m)) - g + 1 = dm - g + 1$$

である．一方， $-3 \leq m$ とすると，

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m))$$

であるから , $m < 0$ について $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) = 0$ であり , $0 \leq m$ について

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) = \binom{m+3}{m}$$

である . これより , $-3 \leq m < 0$ について

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = -dm + g - 1$$

$0 \leq m$ について

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = \binom{m+3}{m} - dm + g - 1$$

が得られた .

ここまでで分かった事実を整理すると次のようになる .

命題 2.1 $\mathbb{P}^3$ 内の曲線 C が次数 d , 種数 g を持つとき , $-3 \leq m$ に対して

$$H^3(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

$$H^2(\mathcal{I}_C(m)) \cong H^0(\omega_C(-m))^\vee$$

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = \binom{m+3}{m} - dm + g - 1$$

である . ただし , $m < 0$ のときは , $\binom{m+3}{m} = 0$ とする .

これを具体的な次数 d , 種数 g に適用して , Beilinson のスペクトル系列を考える .

3 $d = 3, g = 0$

$d = 3, g = 0$ となる曲線を構成する . まず , Beilinson のスペクトル系列を

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(3+p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

として適用するため , $0 \leq m \leq 3$ と $0 \leq i \leq 3$ に対して , $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ の次元を決定する .

$i = 3$ については , 一般的に

$$h^3(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

である． $i = 2$ については，

$$h^2(\mathcal{I}_C(m)) = h^0(\omega_C(-m))$$

であるから， $h^2(\mathcal{I}_C) = g = 0$ である．また， $0 < m$ に対しては，

$$\deg(\omega_C(-m)) = \deg(\omega_C) - \deg(\mathcal{O}_C(m)) = 2g - 2 - dm = -3m - 2 < 0$$

となるので， $h^2(\mathcal{I}_C(m)) = 0$ である．

$$H^0(\mathcal{O}_C(m)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3m))$$

であるから，

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(m))$$

は， $0 \leq k \leq 3$ に対して，

$$x_k \mapsto (y_0)^k (y_1)^{3-k}$$

として得られる 4 変数 m 次式全体から 2 変数 $3m$ 次式全体への射と考えられる．これは明らかに全射である．したがって，

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(m)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_C(m)) \rightarrow 0$$

が完全系列であることから，

$$h^1(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

である．

ここで，

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = \binom{m+3}{m} - dm + g - 1 = \binom{m+3}{m} - 3m - 1$$

であるが， $1 \leq i$ について $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ は決定されたので，

$$h^0(\mathcal{I}_C(m))$$

が求まる．

$$h^0(\mathcal{I}_C) = \chi(\mathcal{I}_C) = 0$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(1)) = \chi(\mathcal{I}_C(1)) = 0$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(2)) = \chi(\mathcal{I}_C(2)) = 3$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(3)) = \chi(\mathcal{I}_C(3)) = 10$$

である．ここまでに決定された $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ の値を縦軸を $0 \leq i \leq 3$ ，横軸を $0 \leq m \leq 3$ として表にすると，

$$\begin{array}{|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{array}$$

となる．

次に，これをもとに Beilinson のスペクトル系列を考える．

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(3+p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

であるから，これを縦軸を $0 \leq q \leq 3$ ，横軸を $-3 \leq p \leq 0$ として表にすると

$$\begin{array}{|cccc} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) & H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \end{array}$$

である．

$$\psi_0 : H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

とすると， $E_2^{p,q}$ は

$$\begin{array}{|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ker \psi_0 & \operatorname{coker} \psi_0 \end{array}$$

となり， $E_2^{p,q} = E_{\infty}^{p,q}$ である．

Beilinson の定理より， $E_{\infty}^{p,q}$ が $\mathcal{I}_C(3)$ を定めるこのようなスペクトル系列が存在する．すなわち， $p+q \neq 0$ に対して

$$E_{\infty}^{p,q} = 0$$

であり， $\bigoplus_{q=0}^n E_{\infty}^{-q,q}$ が $\mathcal{I}_C(3)$ のフィルター付けに対応する次数付き層となる．したがって，

$$\ker \psi_0 = 0$$

であり，

$$\operatorname{coker} \psi_0 = \mathcal{I}_C(3)$$

であるから， $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ の次元を適用して次の結論を得た．

定理 3.1

$$\mathcal{F} = 3\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

$$\mathcal{G} = 10\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

とする． $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の射 φ が十分一般的にとれたならば，

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < 9\}$$

は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異曲線となり，その次数は 3 で種数は 0 である．

4 $d = 3, g = 1$

$d = 3, g = 1$ となる曲線を構成する．まず，Beilinson のスペクトル系列を

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(3+p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

として適用するため， $0 \leq m \leq 3$ と $0 \leq i \leq 3$ に対して， $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ の次元を決定する．

$i = 3$ については，一般的に

$$h^3(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

である． $i = 2$ については，

$$h^2(\mathcal{I}_C(m)) = h^0(\omega_C(-m))$$

であるから， $h^2(\mathcal{I}_C) = g = 1$ である．また， $0 < m$ に対しては，

$$\deg(\omega_C(-m)) = \deg(\omega_C) - \deg(\mathcal{O}_C(m)) = 2g - 2 - dm = -3m < 0$$

となるので， $h^2(\mathcal{I}_C(m)) = 0$ である．

C は射影的正規なので，

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(m))$$

は全射である．したがって，

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(m)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_C(m)) \rightarrow 0$$

が完全系列であることから，

$$h^1(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

である .

ここで ,

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = \binom{m+3}{m} - dm + g - 1 = \binom{m+3}{m} - 3m$$

であるが , $1 \leq i$ について $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ は決定されたので ,

$$h^0(\mathcal{I}_C(m))$$

が求まる .

$$h^0(\mathcal{I}_C) = \chi(\mathcal{I}_C) - 1 = 0$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(1)) = \chi(\mathcal{I}_C(1)) = 1$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(2)) = \chi(\mathcal{I}_C(2)) = 4$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(3)) = \chi(\mathcal{I}_C(3)) = 11$$

である . ここまで決定された $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ の値を縦軸を $0 \leq i \leq 3$, 横軸を $0 \leq m \leq 3$ として表にすると ,

0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0
0	1	4	11

となる .

次に , これをもとに Beilinson のスペクトル系列を考える .

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(3+p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

であるから , これを縦軸を $0 \leq q \leq 3$, 横軸を $-3 \leq p \leq 0$ として表にすると

0	0	0	0
$H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3)$	0	0	0
0	0	0	0
0	$H^0(\mathcal{I}_C(1)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2(2)$	$H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$	$H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$

である .

$$\psi_0 : H^0(\mathcal{I}_C(1)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2(2) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

$$\psi_1 : H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

とすると , $E_2^{p,q}$ は

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ker \psi_0 & \ker \psi_1 / \text{im } \psi_0 & \text{coker } \psi_1 \end{array}$$

となる . $E_3^{p,q} = E_2^{p,q}$ であり , $E_4^{p,q}$ は ,

$$\psi_2 : H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) \rightarrow \text{coker } \psi_1$$

として ,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ker \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ker \psi_0 & \ker \psi_1 / \text{im } \psi_0 & \text{coker } \psi_2 \end{array}$$

であり , $E_4^{p,q} = E_{\infty}^{p,q}$ である .

Beilinson の定理より , $E_{\infty}^{p,q}$ が $\mathcal{I}_C(3)$ を定めるこのようなスペクトル系列が存在する . すなわち , $p + q \neq 0$ に対して

$$E_{\infty}^{p,q} = 0$$

であり , $\bigoplus_{q=0}^n E_{\infty}^{-q,q}$ が $\mathcal{I}_C(3)$ のフィルター付けに対応する次数付き層となる . したがって ,

$$\ker \psi_2 = \ker \psi_0 = \ker \psi_1 / \text{im } \psi_0 = 0$$

であり ,

$$\text{coker } \psi_2 = \mathcal{I}_C(3)$$

である .

これらをまとめると ,

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(1)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2(2) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \text{coker } \psi_1 \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) \rightarrow \text{coker } \psi_1 \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

という完全系列が得られる．

$$\Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$$

であるから， $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ の次元を適用して次の結論を得た．

定理 4.1

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^2(2) \rightarrow 4\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow 11\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \text{coker } \varphi_1 \rightarrow 0$$

が完全系列となるような φ_1 に対して，

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$$

$$\mathcal{G} = \text{coker } \varphi_1$$

とする． $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の射 φ が十分一般的にとれたならば，

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < 1\}$$

は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異曲線となり，その次数は 3 で種数は 1 である．

5 $d = 6, g = 3$

$d = 6, g = 3$ となる曲線を構成する．まず，Beilinson のスペクトル系列を

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{I}_C(3+p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{-p}(-p)$$

として適用するため， $0 \leq m \leq 3$ と $0 \leq i \leq 3$ に対して， $H^i(\mathcal{I}_C(m))$ の次元を決定する．

$i = 3$ については，一般的に

$$h^3(\mathcal{I}_C(m)) = 0$$

である． $i = 2$ については，

$$h^2(\mathcal{I}_C(m)) = h^0(\omega_C(-m))$$

であるから , $h^2(\mathcal{I}_C) = g = 3$ である . また , $0 < m$ に対しては ,

$$\deg(\omega_C(-m)) = \deg(\omega_C) - \deg(\mathcal{O}_C(m)) = 2g - 2 - dm = 4 - 6m < 0$$

となるので , $h^2(\mathcal{I}_C(m)) = 0$ である .

ここで ,

$$\chi(\mathcal{I}_C(m)) = \binom{m+3}{m} - dm + g - 1 = \binom{m+3}{m} - 6m + 2$$

であるが , $2 \leq i$ について $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ は決定されたので ,

$$h^0(\mathcal{I}_C(m)) - h^1(\mathcal{I}_C(m))$$

が求まる .

$$h^0(\mathcal{I}_C) - h^1(\mathcal{I}_C) = \chi(\mathcal{I}_C) - 3 = 0$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(1)) - h^1(\mathcal{I}_C(1)) = \chi(\mathcal{I}_C(1)) = 0$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(2)) - h^1(\mathcal{I}_C(2)) = \chi(\mathcal{I}_C(2)) = 0$$

$$h^0(\mathcal{I}_C(3)) - h^1(\mathcal{I}_C(3)) = \chi(\mathcal{I}_C(3)) = 4$$

である .

$$h^1(\mathcal{I}_C) = h^0(\mathcal{I}_C) = 0$$

が分かる . また , C は平面曲線ではないので ,

$$h^1(\mathcal{I}_C(1)) = h^0(\mathcal{I}_C(1)) = 0$$

である . 最後に ,

$$h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 0$$

となるので

$$h^0(\mathcal{I}_C(3)) = 4$$

である .

ここまでで決定された $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ の値を縦軸を i , 横軸を m として表にすると以下ようになる .

0	0	0	0
3	0	0	0
0	0		0
0	0		4

$h^0(\mathcal{I}_C(2)) = h^1(\mathcal{I}_C(2))$ は 0 か 1 となる .

5.1 $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 0$ の場合

C が 2 次超曲面に入らない場合, $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ は以下ようになる.

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \end{array}$$

したがって, $E_1^{p,q}$ は,

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \end{array}$$

となる. これより, $E_3^{p,q} = E_2^{p,q} = E_1^{p,q}$ となる. $E_4^{p,q}$ は,

$$\varphi_0 : H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

として,

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \ker \varphi_0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \text{coker } \varphi_0 & \end{array}$$

であり,

$$E_4^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \ker \varphi_0 &= 0 \\ \text{coker } \varphi_0 &\cong \mathcal{I}_C(3) \end{aligned}$$

が分かる. これより,

$$\begin{aligned} h^2(\mathcal{I}_C) &= 3 \\ h^0(\mathcal{I}_C(3)) &= 4 \end{aligned}$$

だったから,

$$\mathcal{F} = 3\Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) = 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$$

$$\mathcal{G} = 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

とすれば ,

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

となる完全系列が得られた .

5.2 $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 1$ の場合

C が 2 次超曲面に入る場合 , $h^i(\mathcal{I}_C(m))$ は以下のようにになる .

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

したがって , $E_1^{p,q}$ は ,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^1(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) & 0 \\ 0 & 0 & H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) & H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \end{array}$$

となる . $E_2^{p,q}$ は ,

$$\varphi_0 : H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

として ,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^1(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) & 0 \\ 0 & 0 & \ker \varphi_0 & \operatorname{coker} \varphi_0 \end{array}$$

$E_3^{p,q}$ は ,

$$\varphi_1 : H^2(\mathcal{I}_C) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

として ,

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \ker \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \operatorname{coker} \varphi_1 & 0 & \\ 0 & 0 & \ker \varphi_0 & \operatorname{coker} \varphi_0 & \end{array}$$

$E_4^{p,q}$ は ,

$$\varphi_2 : \ker \varphi_1 \rightarrow \operatorname{coker} \varphi_0$$

として ,

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \ker \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \operatorname{coker} \varphi_1 & 0 & \\ 0 & 0 & \ker \varphi_0 & \operatorname{coker} \varphi_2 & \end{array}$$

であり ,

$$E_4^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

である . したがって ,

$$\ker \varphi_2 = \ker \varphi_0 = 0$$

であることと ,

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} \varphi_2 \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow \operatorname{coker} \varphi_1 \rightarrow 0$$

が完全系列であることが分かる .

これより ,

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(2)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_C(3)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \operatorname{coker} \varphi_0 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \ker \varphi_1 \rightarrow \operatorname{coker} \varphi_0 \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow \operatorname{coker} \varphi_1 \rightarrow 0$$

はともに完全系列であるから , 複体

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

のホモロジー群はそれぞれ

$$0, \ker \varphi_1, \operatorname{coker} \varphi_1$$

である . 一方で複体

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 3\Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow 0$$

も同様のホモロジー群を持つので、2つの複体の写像錐を考えると、そのホモロジー群は0で完全系列となる。すなわち、

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \oplus 3\Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

が完全系列となる。よって、

$$\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \oplus 3\Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3) = 3\mathcal{O}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

$$\mathcal{G} = 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

とすれば、

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}_C(3) \rightarrow 0$$

となる完全系列が得られた。

C が2次超曲面に入らない場合は

$$\mathcal{F} = 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$$

$$\mathcal{G} = 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

であったから、2次超曲面に入るかは $\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$ の寄与によって決定することが分かった。

ここまでの議論をまとめると次の結論が得られる。

定理 5.1

$$\mathcal{F} = 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

$$\mathcal{G} = 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

とする。 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の間の射 φ が十分一般的にとれたならば、

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < 6\}$$

は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異曲線となり、その次数は6で種数は3である。

特に、 φ が

$$\iota : \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1)$$

を同型写像として、

$$\varphi_0 : 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

を用いて、

$$\varphi = (\varphi_0, \iota)$$

と書けるときには、 C は2次超曲面に入らず、そうでないとき C は2次超曲面に入る。

5.3 例

$h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 0$ の場合, すなわち C が 2 次超曲面に入らない場合について具体的に φ を与える.

$$\varphi_0 : 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow 4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

を十分一般的に取れば良いが, $3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$ から $4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ への射は斉次 1 次式と 0 による 4 行 3 列の行列で表される. したがって, このような行列の中で階数が 3 のものを選ぶ. しかし, 例えば

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

としても, 階数は 3 であるが, このときは,

$$\{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < 6\} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 = 0\}$$

となって, 余次元が 1 であるから曲線を定めない.

余次元が 2 となるようなものとして次が見つかった.

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_0 \\ x_3 & x_0 & x_1 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$C = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \text{rk } \varphi(x) < 6\}$$

の余次元は 2 である. しかし, C は可約であり, 6 本の直線に分解される.

計算機代数システム Singular を用いて, C が余次元 2 で既約となるような φ_0 を出力するプログラムを実行した. このプログラムにおいては, ランダムに係数を選び, 余次元 2 で既約となる場合にのみ, φ_0 とイデアルを出力する. プログラムは以下のとおりである.

```
LIB "primdec.lib";
ring k=0,(x,y,z),dp;
```

```

intmat a[4][3];
intmat b[4][3];
intmat c[4][3];
intmat d[4][3];
matrix X[4][3];
ideal I;
int i;
for(i=0;i<5;i++){
a=random(1,4,3);
b=random(1,4,3);
c=random(1,4,3);
d=random(1,4,3);
X=a+b*x+c*y+d*z;
I=minor(X,3);
I=groebner(I);
if(1==size(primdecGTZ(I)) and 1==dim(I)){
X;
I;
}
}
}

```

これを用いて、条件を満たすような射が多数存在することを確認した。

6 謝辞

本論文の執筆にあたっては、楫元先生に大変丁寧なご指導をいただいた。深く感謝の意を表する。また、学部時代にご指導いただいた前田英敏先生にも深謝する。

研究室の先輩である網谷泰治氏、古川勝久氏、渡辺究氏、石川大蔵氏と後輩の石井晋平氏にも様々なご助言をいただいた。橋本研究室の兵藤史武氏、小松研究室の森澤貴之氏には計算機の使い方などをご教示いただいた。ここに謝意を表する。

参考文献

- [1] E. Arvarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris. *Geometry of algebraic curves*. Springer-Verlag, 1985.
- [2] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud. Generic free resolutions and family of generically perfect ideals. *Adv. Math* 18 (1975), 245-301.
- [3] W. Decker, L. Ein, and F.-O. Schreyer. Construction of surfaces in $\mathbb{P}^4$. *J. Algebraic Geometry* 2 (1993), 185-237.
- [4] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [5] 堀川穎二. 複素代数幾何学入門. 岩波書店, 1990.
- [6] James Morrow and Kunihiko Kodaira. *Complex Manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, 1971.