

$\mathbb{P}^2$ の double cover における分類と Chern Numbers

楫研究室 渡邊義史

1 概要

一般に general type の構造については詳しく知られていないが、minimal surface の Chern number についてはある領域内にしか存在しないことが知られている。そこで実際に X を $\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の double cover である smooth projective surface として、そこから分類される minimal surface of general type の Chern Numbers について考察する。基礎体は複素数体とする。

2 定義

Definition 1 X を smooth projective surface として、有理写像 $\Phi_m : X \rightarrow \mathbb{P}^N$,
 $N = h^0(mK_X) - 1$ において $\kappa(X) := \max_{m \in \mathbb{N}} \dim \Phi_m(X) (\leq \dim(X) = 2)$ となるとき、
 $\kappa(X)$ を小平次元という。また、 $\kappa(X) = 2$ であるとき、 X を general type という。

Definition 2 X : general type , K_X が nef のとき、 X は minimal surface という。

Fact X : minimal surface of general type $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c_1^2(X) &= K_X^2 > 0 , \\ c_2(X) &= 12(1 - q(X) + p_g(X)) - K_X^2 > 0 , \\ c_1^2(X) &\leq 3c_2(X) , \\ 5c_1^2(X) - c_2(X) + 36 &\geq 0 \quad (c_1^2(X) : \text{even}) \end{aligned}$$

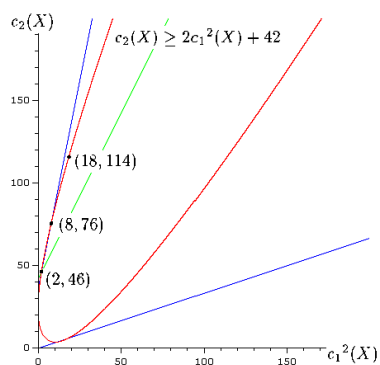
3 設定

X は smooth projective surface として、

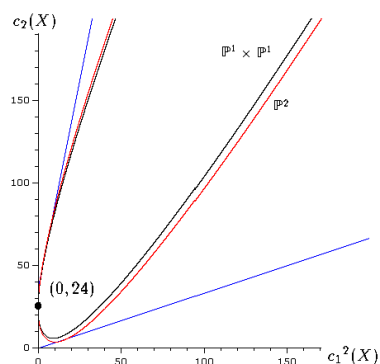
- (a) $\rho : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ は double covering とする。 B : branch divisor としたとき、 $B \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2b)|$ となる。
 $c_i(X)$ を X の i -th Chern class と仮定し、 b で場合分けしていく。
- (b) $\rho : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は double covering とする。このとき、branch divisor B は $|\mathcal{O}(2b, 2b)|$ に属しているとして、minimal surface of general type を考察する。

4 Main Theorem

- (a) (1) $b = 1$ のとき、 X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
 (2) $b = 2$ のとき、 X は $K_X^2 = 2$ の Del Pezzo surface
 (3) $b = 3$ のとき、 X は $K3$ surface
 (4) $b \geq 4$ のとき、 $2c_1^2(X) + 42 \leq c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36$ を満たす
 minimal surface of general type
- (b) $b \geq 4$ のとき、 $2c_1^2(X) + 48 \leq c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36$ を満たす
 minimal surface of general type



$$(2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 162c_1^2(X)$$



$$(2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 162c_1^2(X) , (2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 144c_1^2(X)$$

参考文献

- [1] 堀川頼二, 複素代数幾何学入門, 岩波書店, 1990.
 [2] 秋月康夫, 中井喜和, 永田雅宜, 代数幾何学, 岩波書店, 1987.
 [3] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.
 [4] W.Barth, C.Peters, A.Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.