

$\mathbb{P}^2$ の double cover における分類と Chern Numbers

早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理
楫研究室

5107A0602 渡邊 義史

1 概要

一般に general type の構造については詳しく知られていないが、minimal surface の Chern number についてはある領域内にしか存在しないことが知られている。そこで実際に X を $\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の double cover である smooth projective surface として、そこから分類される minimal surface of general type の Chern Numbers について考察する。基礎体は複素数体とする。

2 準備

2.1 複素多様体と正則写像

定義

$\{U_i\}_{i \in I}$ が M の 開被覆 (open cover) である。 $\iff$ 開集合 $U_i \subset M$ が $\cup U_i = M$ である。

定義

M を Hausdorff 空間とする。 M が n 次元複素多様体 であるとは、
 M の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と各 U_i から $\mathbb{C}^n$ の開部分集合への同相写像

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$$

が与えられ、

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

がすべての α, β に対して、双正則写像となってることをいう。

$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ を正則写像近傍系と呼び、正則写像近傍系を与えることを M の複素構造を定めるという。

また、1 次元の複素多様体を Riemann 面 と呼ぶ。

定義

X, Y をそれぞれ複素多様体とする。連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ が 正則写像 (holomorphic map) であるとは、
 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ を、 X, Y それぞれの正則座標近傍系とすると、 $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ 上で

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

が $\mathbb{C}^{\dim X}$ の開部分集合から $\mathbb{C}^{\dim Y}$ の開部分集合への正則写像を与えるという。 $f : X \longrightarrow Y$ が正則全単射であり、かつ f^{-1} も正則であるとき、双正則写像 (biholomorphic map) であるといい、
 X, Y は双正則同値であるという。

2.2 射影空間の射影と blowing up

射影空間 $\mathbb{P}^m$ を考えて、同次座標を $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ とする。 $F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ を $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ の次数 u の同次多項式とする。任意の複素数 t に対して、

$$F(t\xi_0, t\xi_1, \dots, t\xi_m) = t^u F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$$

であるから、 $\mathbb{P}^m$ の点 P で F が 0 であるか否かは P の同次座標の取り方によらない。 $\mathbb{P}^m$ から

$$M = \{(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{P}^m \mid F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) = 0\}$$

は $\mathbb{P}^m$ の解析的部分集合である。

定義

F が重複因子を持たないとき、 M を u 次の超曲面と呼ぶ。

定義

一般に $F_1, F_2, \dots, F_s$ を有限個の同次多項式とすると、

$$M = \{(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{P}^m \mid F_j(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, s\}$$

は $\mathbb{P}^m$ の解析的部分集合と呼ばれる。

次に $\mathbb{P}^m$ から $\mathbb{P}^{m-1}$ への射影と、それに関連して $\mathbb{P}^m$ の blowing up を定義する。

定義

$\mathbb{P}^m$ の点で同次座標 $(1, 0, 0, \dots, 0)$ の点を P として、 $\mathbb{P}^m$ の点を $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ に対して、 $\mathbb{P}^{m-1}$ の点 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ に対応させる写像を π とする。ただし P に対応する点は、同次座標 $(0, 0, \dots, 0)$ となるので、 $\pi(P)$ は定義されない。 π を点 P からの射影と呼ぶ。

P が $\mathbb{P}^m$ の勝手な点の場合には、1 次式

$$f = c_0 \xi_0 + \dots + c_m \xi_m$$

で $f(P) = 0$ となるものの全体を考える。これらは $\mathbb{C}$ 上 m 次元のベクトル空間であるから、その基底を $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ とする。もし $Q \neq P$ ならば、少なくとも 1 つは $f_i(Q) \neq 0$ なる i が存在する。したがって、 $Q \longrightarrow (f_1(Q), f_2(Q), \dots, f_m(Q)) \in \mathbb{P}^{m-1}$ によって写像 π が定義される。これが、 P からの射影である。ベクトル空間の基底のとりかえ

$$f'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j \quad , \quad \det(a_{ij}) \neq 0$$

に対して、 $\mathbb{P}^{m-1}$ の変換 $g: (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \longrightarrow (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m)$, $\xi'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \xi_j$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ が定義されて、 π は $g \circ \pi$ で置き換えられる。したがって、 π は P によって一意に定まる。

P が $(1, 0, \dots, 0)$ となるように同次座標をとりかえれば、先の場合に帰着される。

π は $\mathbb{P}^m - \{P\}$ から $\mathbb{P}^{m-1}$ への正則写像であるが、これを P まで連続に拡張することができない。

$P = (1, 0, \dots, 0)$ として同次座標 $(1, t\eta_1, \dots, t\eta_m)$, $t \neq 0$ で定まる点を Q_t とする。このとき、

$$\pi(Q_t) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$$

であるから、 $t \rightarrow 0$ の極限をとって $\pi(P) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ でなければならない。いいかえると、 $\mathbb{P}^m$ の点 $\pi(Q_t)$ が P に限りなく近づくとき、その近づきかたによって $\lim \pi(Q_t)$ は $\mathbb{P}^{m-1}$ のあらゆる点をとることができる。

定義

一般に、 M, N を複素多様体で $h: M \longrightarrow N$ を正則写像とする。

直積 $M \times N$ の部分集合 $\Gamma = \{ (x, y) \in M \times N \mid h(x) = y \}$ を h のグラフと呼ぶ。

M の局所座標系を $\{ (U_i, (z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n))_{i \in I} \}$ 、 N のそれを $\{ (V_\lambda, (w_\lambda^1, w_\lambda^2, \dots, w_\lambda^k))_{\lambda \in \Lambda} \}$ なら、 $M \times N = \{ (U_i \times V_\lambda, (z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n, w_\lambda^1, w_\lambda^2, \dots, w_\lambda^k))_{i \in I, \lambda \in \Lambda} \}$ を局所座標系とする複素多様体であると考えられる。このとき、各成分への射影 $p_1 : M \times N \longrightarrow M$ 、 $p_2 : M \times N \longrightarrow N$ は正則写像である。 p_1 の Γ への制限を同じ p_1 であらわす。

命題 2.1

Γ は $M \times N$ の部分多様体で、 $p_1 : \Gamma \longrightarrow M$ は双正則写像である。

(証明)

M の点 x の座標近傍 U と $y = h(x)$ の座標近傍 V を $h(x) \subset V$ となるようにとる。それぞれの局所座標を

$(z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n), (w_\lambda^1, w_\lambda^2, \dots, w_\lambda^k)$ として、 h は

$$w^\alpha = h_\alpha(z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n) \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, k$$

で定義されてるとする。このとき、

$$\Gamma \cap (U \times V) = \{ (z, w) \in U \times V \mid w^\alpha - h_\alpha(z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^n) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, k \}$$

である。これより、 Γ は $M \times N$ の部分多様体であることがわかる。

次に、 $s : M \longrightarrow \Gamma$ を $s(x) = (x, h(x))$ によって定義すれば、 s は正則写像で $p_1 : \Gamma \longrightarrow M$ の逆写像を与える。Q.E.D.

以上のことを、 $M = \mathbb{P}^m - \{P\}$ 、 $N = \mathbb{P}^{m-1}$ 、 $h = \pi$ に適用すると、

$$\Gamma = \{ (x, y) \in (\mathbb{P}^m - \{P\}) \times \mathbb{P}^{m-1} \mid \pi(x) = y \}$$

である。 Γ を $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^{m-1}$ の部分集合と考えて、その閉包を Γ^* とする。

$\mathbb{P}^m$ の同次座標を $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ 、 $\mathbb{P}^{m-1}$ の同次座標を $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ とすれば、 Γ の任意の点は次の方程式

$$\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k = 0 \quad , \quad (k, l = 1, 2, \dots, m) \tag{1}$$

を満たす。したがって、 Γ^* の任意の点は (1) をみたす。逆に $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^{m-1}$ 上の点 (ξ, η) で (1) を満たすものを考える。もし $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$ ならば、 $\xi_i \neq 0$ である i を用いて

$$\eta_j = (\eta_i / \xi_i) \xi_j \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

と書ける。したがって、 $\eta_i \neq 0$ で $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ と $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ は $\mathbb{P}^{m-1}$ の同一の点である。すなわち、 (ξ, η) は Γ の点である。もし $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (0, 0, \dots, 0)$ ならば、(1) は任意の $\eta \in \mathbb{P}^{m-1}$ に対し成り立つ。この点は

$$((1, 0, \dots, 0), (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^{m-1}$$

である。これは上で見たように、 $((1, t\eta_1, \dots, t\eta_m), (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)) \in \Gamma$ の $t \longrightarrow 0$ のときの極限である。したがって、 Γ^* に属する。

命題 2.2

Γ^* は (1) で定義される $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^{m-1}$ の解析的部分集合である。さらに、 Γ^* は m 次元の部分多様体である。

(証明)

座標近傍を

$$V_i = \{ (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{P}^m \mid \xi_i \neq 0 \} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, m$$

$$W_j = \{ (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \in \mathbb{P}^{m-1} \mid \eta_j \neq 0 \} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

とする。 V_i 上の座標は、 $(z_i^0, z_i^1, \dots, z_i^{i-1}, z_i^{i+1}, \dots, z_i^m)$, $z_i^k = \xi_k / \xi_i$

W_j 上の座標は、 $(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{j-1}, w_j^{j+1}, \dots, w_j^m)$, $w_j^k = \eta_k / \eta_j$ で与えられる。

$(x, y) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^{m-1}$ を Γ^* の点とする。 $x \in V_i$, $i \neq 0$ ならば、命題 2.1 によつて Γ^* は (x, y) で非特異で m 次元である。 $(x, y) \in V_0 \times W_j$ のとき (1) は

$$z_0^k - z_0^j w_j^k = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, \hat{j}, \dots, m$$

$$z_0^k w_j^l - z_0^l w_j^k = 0 \quad , \quad k, l = 1, 2, \dots, \hat{j}, \dots, m$$

と同次である。第 2 の方程式は、第 1 の方程式から従うから、 $z_0^j, w_j^1, \dots, w_j^{j-1}, w_j^{j+1}, \dots, w_j^m$ を任意にさだめれば、他の z_0^k は一意に定まる。すなわち、 Γ^* の局所座標として、

$$(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{j-1}, z_0^j, w_j^{j+1}, \dots, w_j^m)$$

をとることができる。Q.E.D.

Γ^* の点 (x, y) に対し、 $\mathbb{P}^m$ の点 x に対応させる正則写像を σ とする。、 $\mathbb{P}^m$ の点 x に対して、

$$x \neq p \text{ のとき、} \sigma^{-1}(x) = (x, \pi(x))$$

$$x = p \text{ のとき、} \sigma^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{P}^{m-1}$$

である。また、命題 2.1 により σ は双正則写像 $\Gamma^* - \sigma^{-1}(p) \longrightarrow \mathbb{P}^m - \{P\}$ を引き起こす。

定義

$\sigma : \Gamma^* \longrightarrow \mathbb{P}^m$ を $\mathbb{P}^m$ の点 p における blowing up と呼び、 $\sigma^{-1}(p)$ を例外因子と呼ぶ。

2.3 層とコホモロジー

定義

X を位相空間とする。 X 上アーベル群 $\mathcal{F}$ が 前層 (pre sheaf) であるとは、
任意の部分集合 $U \subseteq X$ に対して、アーベル群 $\mathcal{F}(U)$ であり、 $\forall V \subseteq U \subseteq X$ に対して、
準同型写像 $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ が次の条件を満たすことである。

- (0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
- (1) $\rho_{U,U}$ は恒等写像 $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ である。
- (2) $W \subseteq V \subseteq U$ が開部分集合ならば、 $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$

定義

次の条件を満たすとき、前層 $\mathcal{F}$ は 層 (sheaf) という。

- (1) U は開集合で、 $\{V_i\}$ が U の開被覆としたとき、
 $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意に i に対して、 $\rho_{V_i,U}(s) = 0$ ならば、 $s = 0$
- (2) $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ が任意の i, j に対して、
 $\rho_{V_i \cap V_j, V_i}(s_i) = \rho_{V_i \cap V_j, V_j}(s_j)$ ならば、 $s_j = \rho_{V_j,U}$ であるような $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。

ここで、(2) の s は一意である。なぜならば、 $a, b \in \mathcal{F}(U)$ としたとき、

$$\rho_{V_j,U}(a) = a_j = \rho_{V_j,U}(b) \implies \rho_{V_j,U}(a - b) = 0, \quad \forall j$$

(1) より $a - b = 0$ であるから、 $a = b$

定義

$\mathcal{F}(U) = \mathcal{T}(U, \mathcal{F})$ ($= H^0(U, \mathcal{F})$) と書く。

$\mathcal{T}(U, \mathcal{F})$ の元を $\mathcal{F}$ の U 上の 切断 (section) という。

また、 $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ の元を $\mathcal{F}$ の 大域切断 (global section) という。

定義

$\mathcal{G}$ を X 上の前層として、 $\forall x \in X$ に対して $\mathcal{G}(U)$ の 帰納極限 (inductive limit) を

$$\mathcal{G}_x = \text{ind} \lim_{U \ni x} \mathcal{G}(U)$$

としたとき、 $\mathcal{G}_x$ を $\mathcal{G}$ の x における 茎 (stalk) という。

ここで、帰納極限とは、 $\alpha \in \mathcal{G}(U), \beta \in \mathcal{G}(V)$ が

$$\alpha \sim \beta \iff \exists W \subset U \cap V \text{ s.t. } \rho_{W,U}(\alpha) = \rho_{W,V}(\beta)$$

とするとき、 α と β は同値関係になっている。このとき、 $\mathcal{G}_x = \bigcup_{U \ni x} \mathcal{G}(U) / \sim$ であること。

定義

X を複素多様体とし、 $\mathcal{O}_X$ を各開集合 $U \subset X$ に対して

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は正則} \}$$

とおくと、自然な制限準同型写像に関して層になる。 $\mathcal{O}_X$ を X の 構造層 という。

定義

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は X 上の前層で、準同型 $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ は $V \subseteq U$ であるような任意の開集合に対して、アーベル群の準同型 $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ から成るとき

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{V,U} \downarrow & & \downarrow \rho'_{V,U} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

は可換である。ここで、 ρ, ρ' は制限写像である。 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が X 上の層ならば、層の準同型に関して同じ定義が使える。両側の逆写像を持つ準同型写像を 同型写像 という。

また、 X 上の前層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ は、任意の $p \in X$ に対して stalk 上の準同型 $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ を導く。

定義

X, Y を位相空間として、 $f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする。 $\mathcal{F}$ を Y 上の層として、

$$(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \text{ind} \lim \{ \mathcal{F}(V) \mid U \subset f^{-1}(V) \}$$

と置いて、 $\mathcal{F}$ の 引き戻し (pull back) と呼ぶ。ただし、 U は X の開集合であり、 V は Y の開集合である。

また、 $f : X \longrightarrow Y$ が複素多様体の間で正則写像であり、 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_Y$ の層である場合は

$$f^*\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

と置いて、引き戻し (pull back) と呼ぶ。 $f^*\mathcal{F}$ は、 $\mathcal{O}_X$ 加群であることに注意する。

今度は、逆に 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$, X 上の層 $\mathcal{F}$ が与えられたとき、 Y の任意の開集合 V に対して、

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

である Y 上の層 $f_*\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の 順像 (direct image) と呼ぶ。

特に、 $f : X \longrightarrow Y$ が複素多様体の間の正則写像で、 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$ 加群の層であるならば、 $f_*\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_Y$ 加群の層である。

定義

X を位相空間、 $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆としたとき、 $\{U_i\}_{i \in I}$ が 局所有限 であるとは、

$$\forall p \in X, \exists V_p : p \text{ 開集合 s.t. } \{ i \mid V_p \cap U_i \neq \emptyset \} \text{ が有限集合}$$

定義

$\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆であるとき、 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $\{U_i\}_{i \in I}$ の細分であるとは

$$\forall \lambda \in \Lambda, \exists i \in I \text{ s.t. } V_\lambda \subset U_i$$

定義

X がパラコンパクト (para compact) であるとは、 X の任意の開被覆が局所有限な細分を持つことである。

定義

$u = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆であるとして、 $U_{i_0 i_1 \dots i_q} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}$ と定める。
 $f_{i_0 i_1 \dots i_q} \in \mathcal{T}(U_{i_0 i_1 \dots i_q}, \mathcal{F})$ としたとき、 $\{f_{i_0 i_1 \dots i_q}\}$ を $\mathcal{F}$ に値をとる q 次の cochain という。
 また、 q 次 cochain 全体を $C^q(u, \mathcal{F})$ と書く。 $C^q(u, \mathcal{F})$ は abel 群である。

命題 3.1

写像 $\delta_q : C^q(u, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(u, \mathcal{F})$ と定義したとき、

$$\delta_q \{f_{i_0 i_1 \dots i_q}\} = \{g_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}}\} \text{ ならば、 } g_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{q+1}} \text{ である。}$$

このとき、 $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ である。

(証明)

$q = 0$ のとき、 $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$, $C^0(u, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(u, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(u, \mathcal{F})$ である。
 $u = \{U_i\}_{i \in I}$ であったから、 $\mathcal{T}(U_i, \mathcal{F})$, $\mathcal{T}(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$, $\mathcal{T}(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{F})$ を考える。
 $\xi = \{f_i\}$, $f_i \in \mathcal{T}(U_i, \mathcal{F})$ として、 $(f_0 \xi)_{ij} = f_j - f_i$ である。

$$(f_1(f_0 \xi))_{ijk} = (f_0 \xi)_{jk} - (f_0 \xi)_{ik} + (f_0 \xi)_{ij} = f_k - f_j - (f_k - f_i) + (f_j - f_i) = 0$$

だから任意の i, j, k について、 $(\delta_1(\delta_0(\xi)))_{ijk} = 0$ である。よって、 $\delta_1(\delta_0(\xi)) = 0$

$\delta_1 \circ \delta_0 = 0$ である。 $q = n$ の場合も同様の議論で証明できる。よって、 $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ である。Q.E.D.

定義

$Z^q(u, \mathcal{F}) = \{t \in C^q(u, \mathcal{F}) \mid \delta_q(t) = 0\} = \text{Ker } \delta_q$ と定義するとき、
 $Z^q(u, \mathcal{F})$ を q 次の cocycle の群 という。

また、 $B^q(u, \mathcal{F}) = \delta_{q-1}(C^{q-1}(u, \mathcal{F})) = \text{Im } \delta_{q-1}$ と定義する。

このとき、 $B^0(u, \mathcal{F}) = 0$ とし、 $B^q(u, \mathcal{F})$ を q 次 coboundary の群 という。

$\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ より、 $Z^q(u, \mathcal{F}) \supset B^q(u, \mathcal{F})$ である。

$H^q(u, \mathcal{F}) = Z^q(u, \mathcal{F}) / B^q(u, \mathcal{F})$ を u に関する q 次 Cech cohomology の群 という。

2.4 微分形式

定義

M が C^∞ 級多様体 であるとは、 M が連結 , Hausdorff 空間であり

座標近傍 $(U_i; x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ が与えられることである。

定義

$\forall p \in M$ とすると、 $\exists p \in U_i$ である。このとき、 M の p における接空間 $T(M)_p$ を

$$T(M)_p = L\{(\frac{\partial}{\partial x_i^1})_p, (\frac{\partial}{\partial x_i^2})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_i^n})_p\} \quad , \quad (\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

と定義する。また、

$T^*(M)_p$ を $Hom(T(M)_p, \mathbb{R})$ と定義する。このとき、基底は $\{(dx_i^1)_p, (dx_i^2)_p, \dots, (dx_i^n)_p\}$

ここで、 $dim T(M)_p = dim T^*(M)_p$ である。 $T(M) = \bigcup_{p \in M} T(M)_p$ とするとき

$T(M)$ は C^∞ 級多様体である。これを M の 接 bundle (tangent bundle) と呼ぶ。同様に、

$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T^*(M)_p$ も C^∞ 級多様体である。これを M の 余接 bundle (cotangent bundle) と呼ぶ。

定義

$V = T(M)$ または $T^*(M)$ とする。射影 $\pi: V \longrightarrow M$, M の開集合を U としたとき、

φ が V の U 上の 可微分切断 であるとは、 $\varphi: U \longrightarrow V$ が連続写像であり

$$\pi \circ \varphi = id_U \quad (\implies \forall p \in U \quad , \quad \varphi(p) \in T(M)_p)$$

φ が、 $x^1, \dots, x^n$ の C^∞ 級多様体であることである。

$T(M)$ の可微分切断を Vector 場 という。また、 $T^*(M)$ の可微分切断を 1 次微分形式 という。

定義

$\bigwedge^r T^*(M)_p$ を $T^*(M)_p$ の r 回の外積とすると、 $\bigwedge^r T^*(M) = \bigcup_{p \in M} (\bigwedge^r T^*(M)_p)$ である。

$\bigwedge^r T^*(M)_p$ の基底 (として、 $\{(dx_i^{\alpha_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_i^{\alpha_r})_p\}$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$ である。

M の開集合を U とするとき、

$\bigwedge^r T^*(M)$ の U 上の可微分切断 $\varphi: U \longrightarrow \bigwedge^r T^*(M)$ を U 上の r 次微分形式 という。

$p \in U = U_i$ ならば、

$$\varphi = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_r} \varphi_{i_{\alpha_1} \dots i_{\alpha_r}} (dx_i^{\alpha_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_i^{\alpha_r})_p$$

$\varphi_{i_{\alpha_1} \dots i_{\alpha_r}}$ は、 C^∞ 級多様体である。 φ を r 次微分形式 という。

U 上の r 次微分形式全体を $\mathcal{A}^r(U)$ と書く。

ここからは、複素多様体上の微分形式について考える。 M を複素多様体、 $z \in M$ とするとき

$$(z^1, z^2, \dots, z^n) \quad , \quad z^j = x^{2j-1} + ix^{2j} \quad \text{は } z \text{ の座標近傍での座標}$$

M は C^∞ 級多様体なので、

$${}^{\mathbb{C}}T(M)_z = L\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}}\right\} = L\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} - i\frac{\partial}{\partial x^{2j}}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + i\frac{\partial}{\partial x^{2j}}\right)$$

$$T(M)_z = L\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right\} \quad , \quad \bar{T}(M)_z = L\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\} \quad \text{とすると、}$$

$${}^{\mathbb{C}}T(M)_z = T(M)_z \oplus \bar{T}(M)_z$$

${}^{\mathbb{C}}T(M)_z$ の双対空間を ${}^{\mathbb{C}}T^*(M)_z$ として、

$$dz^j = dx^{2j-1} + i dx^{2j} \quad , \quad d\bar{z}^j = dx^{2j-1} - i dx^{2j}$$

とすると、 ${}^{\mathbb{C}}T^*(M)_z = L\{dz^1, \dots, dz^n, d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n\}$ である。

このとき、 $T^*(M)_z = L\{dz^1, \dots, dz^n\} \quad , \quad \bar{T}^*(M)_z = L\{d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n\}$ とすると

$${}^{\mathbb{C}}T^*(M)_z = T^*(M)_z \oplus \bar{T}^*(M)_z$$

定義

$T(M) = \bigcup_{z \in M} T(M)_z$ を M の 正則接 bundle という。

また、 $T^*(M) = \bigcup_{z \in M} T^*(M)_z$ を M の 正則余接 bundle という

定義

$$\bigwedge^r {}^{\mathbb{C}}T^*(M)_z = L\{dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q} \mid \alpha_1 < \dots < \alpha_p, \beta_1 < \dots < \beta_q, p+q=r\}$$

として、外積は $\bigwedge^r T^*(M) = \bigcup_{z \in M} \left(\bigwedge^r {}^{\mathbb{C}}T^*(M)_z\right)$ である。 M の開集合を U とするとき、

$\bigwedge^r T^*(M)$ の U 上の可微分切断 $\varphi: U \longrightarrow \bigwedge^r T^*(M)$ を U 上の (p, q) 型の微分形式 または (p, q) 形式 という。座標表示は、 $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}$ を C^∞ 級関数として

$$\varphi = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_p, \beta_1 < \dots < \beta_q} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q}$$

外微分 d について、関数 f については $\partial f = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} dz^\alpha \quad , \quad \bar{\partial} f = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\beta} d\bar{z}^\beta$ とするとき、

df を $df = \partial f + \bar{\partial} f$ と定義する。 φ が (p, q) 形式のとき

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_p, \beta_1 < \dots < \beta_q} (d\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}) dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q} \\ &= \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_p, \beta_1 < \dots < \beta_q} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z^\alpha} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q} \\ &\quad + (-1)^p \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_p, \beta_1 < \dots < \beta_q} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}^\beta} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}_q} \end{aligned}$$

これより、 $\partial\varphi$ は $(p+1, q)$ 形式であり、 $\bar{\partial}\varphi$ は $(p, q+1)$ 形式である。

定義

U を M の任意の開集合として、 U 上の (p, q) 形式 を $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ と書く。

$\rho_{V,U}$ を $V \subset U$ の定義域の制限としたとき、 $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ は M 上の層である。つまり、 (p, q) 形式の germ の層である。ここで、 p を固定したときに $\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}$ は層の準同型である。

系列

$$\mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,n}$$

が作れる。

定義

M 上正則 p 次形式の germ の層 $\text{Ker}(\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,0} \longrightarrow \mathcal{A}^{p,1})$ を Ω^p と書く。

2.5 因子と直線束

定義

M を複素多様体で、 $\{U_i\}_{i \in I}$ を M の開被覆とする。 $\alpha_i, \beta_i (\neq 0)$ を U_i 上で正則であるとき、 $U_i \cap U_j$ 上で $\alpha_i \beta_j = \alpha_j \beta_i$ であるとき、 $\varphi_i = \{U_i, (\alpha_i, \beta_i)\}$ が M 上の 有理型関数 という。

定義

$\psi_i (\neq 0)$ が U_i 上の有理型関数で、 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ であるとする。 $\psi_i = g_{ij} \psi_j$ であるような、 $U_i \cap U_j$ 上のどの点でも 0 にならない正則関数 k_{ij} が存在するとき、 $\{(U_i, \psi_i)\}$ を Cartier 因子の局所方程式系 と呼ぶ。

開集合 $U \subset M$ とする。 $U \longmapsto \mathcal{M}_M(U) = \{U \text{ 上の有理型関数全体} \}$ とすると、 $\mathcal{M}_M$ は M 上の層である。

$U \longmapsto \mathcal{M}_M^*(U) = \{f \in \mathcal{M}_M(U) \mid f \neq 0\}$ とすると、 $\mathcal{M}_M^*$ は乗法について層。

$U \longmapsto \mathcal{O}_M^*(U) = \{f \in \mathcal{O}_M(U) \mid f \text{ は } U \text{ のどの点でも } 0 \text{ でない}\}$ とすると、 $\mathcal{O}_M^*$ は乗法について層。

よって、 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_M^*(U) \longrightarrow \mathcal{M}_M^*(U)$ は完全である。

これにより、 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow \mathcal{M}_M^*$ は完全である。 $\mathcal{O}_M^* \longrightarrow \mathcal{M}_M^*$ の Coker を Div_M と書くことにする。

よって、 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow \mathcal{M}_M^* \longrightarrow \text{Div}_M \longrightarrow 0$ は完全である。

定義

$\mathcal{T}(M, \text{Div}_M)$ の元 D を Cartier 因子 と呼ぶ。

D が 正因子 (effective divisor) とは、 ψ_i が U_i 上で正則関数であること。

D が 零因子 (i.e. $D = 0$) とは、任意の $\psi_i = 1$ であること。

D_1, D_2 が Cartier 因子とする。 $\{(U_i, \psi_i)\}$ を D_1 の局所方程式系、 $\{(V_j, \eta_j)\}$ を D_2 の局所方程式系 とすると、 $\{(U_i \cap V_j, \psi_i \eta_j)\}$ は $D_1 + D_2$ の局所方程式系となる。また、 $-D_1 = \{(U_i, 1/\psi_i)\}$ とすると、 $D_1 + (-D_1) = \{(U_i, 1)\} = 0$ であるから、Cartier 因子全体は Abel 群である。

φ を M 上の有理型関数とすると、 $\varphi_i = \{(U_i, (\alpha, \beta))\}$, U_i 上で $\varphi_i = \alpha_i/\beta_i$ である。

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} = \frac{\alpha_i \beta_j}{\alpha_j \beta_i} = 1$$

と定義することにより、 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ は Cartier 因子である。つまり、 M 上の有理型関数は Cartier 因子を定める。

定義

上で定めた Cartier 因子を φ の 因子 といい、 $\text{div}(\varphi)$ または (φ) と書く。

定義

Cartier 因子 D が 0 と 線形同値 であるとは、 $D = (\varphi)$ であるような、 M 上の有理型関数 φ が存在することである。

また、 D_1, D_2 が 線形同値 であるとは、 $D_1 - D_2$ が 0 と線形同値であることである。つまり、 $D_1 - D_2 = (\varphi)$ が存在することである。

D と 線形同値な正因子全体を、完備一次系 といい、 $|D|$ で表す。

定義

$\{(U_i, \psi_i)\}$ が Cartier 因子の局所方程式系であるとき、 $\psi_i = g_{ij} \psi_j$ となる $g_{ij} = \psi_i/\psi_j$ を 変換関数 と呼ぶ。また、 $\{g_{ij}\}$ を 変換関数系 と呼ぶ。

定義

$\{U_i\}_{i \in I}$ が M の開被覆、 $g_{ij} \in \mathcal{T}(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_M^*)$ であるとする。 $g_{ii} = 1$ であるとき、 $\{g_{ij}\}$ が $\{U_i\}_{i \in I}$ に属する変換関数系 と呼ぶ。

ここで、 $\{U_i \times \mathbb{C}\}_{i \in I}$ を $\{g_{ij}\}$ で貼り合わせる。 $\tilde{L} = \bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{C}$ が disjoint union だとする。
 $(z_i, \xi_i) \in U_i \times \mathbb{C}$, $(z_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C}$ としたとき、

$$(z_i, \xi_i) \sim (z_j, \xi_j) \iff z_i = z_j, \xi_i = g_{ij}(z_j) \xi_j$$

と定めるとき、 $\sim$ は同値関係になっている。

$L = \tilde{L} / \sim$ と定義したとき、写像 $\pi : L \longrightarrow M$ を考える。

定義

L を複素多様体、 $\pi: L \rightarrow M$ を全射正則写像とするとき、次の条件を満たす M の開被覆 $\{U_i\}$ が存在するとき、 L が M 上の直線束 (line bundle) であるという。

- (1) $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$ (双正則)
- (2) $(z_i, \xi_i) \in U_i \times \mathbb{C}, (z_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C}$ としたとき、

$$\exists g_{ij} \in \mathcal{T}(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_M^*) \quad s.t. \quad \xi_i = g_{ij}(z) \xi_j$$

また、 M 上の直線束全体を $Pic(M)$ と書く。

定義

$s: L \rightarrow M$ が正則写像であるとする。 s が L の正則切断 であるとは、任意の $z \in M$ に対して、 $\pi(s(z)) = z$ であることである。つまり、 $\pi \circ s = id$ である。

定義

$s = \{s_i\}$ が L の有理型切断 であるとは、 s_i が L 上の有理型関数として $s_i(z) = g_{ij}(z)s_j(z)$, $z \in U_i \cap U_j$ であることである。

2.6 Riemann 面の分岐被覆面と Hurwitz の定理

定義

$H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の $\mathbb{C}$ 上の次元を コンパクト Riemann 面 X の 種数 (genus) と呼び、 $g, g(x)$ と書く。

定義

X を Riemann 面、正則写像 $f: X \rightarrow Y$ が定数写像でないならば $f(X) = Y$ で、任意の $Q \in Y$ に対して $f^{-1}(Q)$ は有限集合である。

このことから、 X を Y の分岐被覆面 (ramified covering) または 被覆 Riemann 面 と呼ぶ。

$f: X \rightarrow Y$ を被覆 Riemann 面 として、 $p \in X$, $Q = f(p)$ とする。

このとき、 P の近傍における X の局所座標 Z と Q の近傍における局所座標 W を $z(p) = 0, w(Q) = 0$

f は p の近傍で、 $z \rightarrow w = z^e$ であるとしてよい。このような局所座標 z, w のとり方は一意的ではないが、 e は p によって定まる。

補題

$f: X \rightarrow Y$ は定数写像でないとして、 $p \in X$, $Q = f(p)$ とする。

このとき、 p の近傍における X の局所座標 z と Q の近傍における局所座標 w を次のようにとることができる。

- (i) $z(p) = 0$, $w(Q) = 0$

(ii) p の十分小さい近傍 U で f は、 $z \rightarrow w = z^e$ (e は正整数) で与えられる。

(証明)

Q を中心とする Y の局所座標 w と p を中心とする X の局所座標 ξ を任意にとる。

このとき、 f は正則関数 φ を用いて $w = \varphi(\xi)$, $\varphi(0) = 0$ で与えられる。

φ の 0 における零点の位数 e とすると

$$\varphi(\xi) = \xi^e \psi(\xi) , \quad \psi(0) \neq 0$$

なる正則関数 ψ が存在する。 $\psi(0)$ の e 乗根 α を 1 つ選べば、原点の近傍で定義された正則関数 η で

$$\eta(0) = \alpha , \quad \eta^e(\xi) = \psi(\xi)$$

となるものが定まる。なぜなら、 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $g: u \rightarrow v = u^e$ を考える。

$g(\alpha) = \psi(0)$, $g'(\alpha) \neq 0$ であるから、逆関数によって v 平面の点 $\psi(0)$ の近傍で定義された

正則関数 $h = h(v)$ で $h(\psi(0)) = \alpha$, $h^e(v) = v$ をみたすものが存在する。

そこで、 $\eta(\xi) = h(\psi(\xi))$ とすればよい。この η を用いて $z = \xi\eta(\xi)$ とすれば、

z は p の局所座標で f は $w = z^e$ で与えられる。 Q.E.D.

定義

この e を e_p と書いて、 p における 分岐指数 (ramification index) と呼ぶ。

$e_p = 1$ のときは、 p において 不分岐である といい、そうでないときは 分岐している という。

f が p で分岐していれば、 p の十分小さな近傍の p 以外の各点で f は不分岐。

x はコンパクトだから、 $f: X \rightarrow Y$ は高々有限個の点で分岐している。

定義

f が分岐する点の全体を $R = \{ p \in X \mid e_p > 1 \}$ として、 $B = f(R) \subset Y$ とする。

B は 分岐点の集合 (branch locus) と呼ばれる。

$Q \in B$ ならば、 $f^{-1}(Q)$ の少なくとも 1 点で f が分岐しているとは限らない。

R が空集合のとき、 f を 不分岐被覆 (unramified covering) と呼ぶ。

定義

X, Y が局所連結な位相空間で、 $f: X \rightarrow Y$ は連続写像であるとする。

Y の各点 Q に対して十分小さい連結な近傍 V をとって、 $f^{-1}(V)$ の連結部分を W_λ ($\lambda \in \Lambda$) とすれば、 f の制限 $W_\lambda \rightarrow V$ が同相写像であるとき、 f は 位相的な被覆である といい、 f を 被覆写像 という。

命題 6.1

X, Y を 2 つのコンパクト Riemann 面として、 $f: X \rightarrow Y$ を被覆 Riemann 面、

B をその branch locus とする。このとき、 f によって引き起こされる写像 $X - f^{-1}(B) \rightarrow Y - B$ は位相的な被覆である。

(証明)

Q を $Y - B$ の点として、 $f^{-1}(Q) = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ とする。各 p_i の近傍 U_i を互いに交わらないように、また $f^{-1}(B)$ と交わらないようにとる。 X はコンパクトであるから、 f は閉集合を閉集合に写す写像である。したがって、

$$z = f\left(X - \bigcup_{i=1}^m U_i\right)$$

は Y の閉集合で、 Q を含まない。そこで、 Q の近傍 V を z と交わらないようにとれば $f^{-1}(V)$ は $\bigcup_{i=1}^m U_i$ に含まれる。一方、 f は各 p_i の開近傍 W_i から $f(W_i)$ の上への同相写像を引き起こす。このとき、 V のすべての $f(W_i)$ に含まれるようにとりなおせば、これを求める Q の近傍である。Q.E.D.

定義

$Q \in Y - B$ として、 $f^{-1}(Q)$ に属する X の点の個数を $m(Q)$ とする。 $m(Q)$ は局所的に定数である。しかも $Y - B$ は連結であるから、 $m(Q)$ は $Q \in Y - B$ のとり方によらない。この数を f の次数と呼んで、 $\deg f$ であらわす。 $\deg f = m$ のとき、 X を Y の m 重被覆面と呼ぶ。

命題 6.2

$f : X \rightarrow Y$ を次数 m の被覆 Riemann 面とする。 $Q \in Y$, $f^{-1}(Q) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ 各 p_λ における分岐指数を e_{p_λ} とすれば、

$$\sum_{\lambda=1}^s e_{p_\lambda} = m$$

が成り立つ。特に、

- (i) 任意の $Q \in Y$ に対して、 $f^{-1}(Q)$ は高々 m 個の点から成る。
- (ii) $f^{-1}(Q)$ が丁度 m 個の点から成るために必要十分な条件は、 $f^{-1}(Q)$ の各点で f が不分岐なことである。

(証明)

Q を中心とする局所座標 w を選び、次に各 p_λ を中心とする局所座標 z_λ を適当に選べば、 f は p_λ の近傍で、 $z_\lambda \rightarrow w = z_\lambda e_\lambda$, $e_\lambda = e_{p_\lambda}$ で与えられる。 Y の点 $Q' (\neq Q)$ を Q に十分近くとれば、 $f^{-1}(Q')$ は各 p_λ の近傍に丁度 e_λ 個の点を持っている。命題 6.1 より、 Q' の逆像はこれで尽きる。したがって、 $m = \sum e_\lambda$ Q.E.D.

命題 6.3

$f : X \rightarrow Y$ を次数 m の被覆 Riemann 面。 D を Y 上の因子とすると、

$$\deg f^* D = m \deg D$$

(証明)

命題 6.2 より、 $f^* D = \sum e_\lambda p_\lambda$ だから明らかである。 Q.E.D.

定理 6.4 (Hurwitz の定理)

$f : X \rightarrow Y$ を 次数 m の被覆 Riemann 面 とする。 X, Y の種数をそれぞれ $g(X), g(Y)$ とすれば、

$$2g(X) - 2 = m(2g(Y) - 2) + \sum_p (e_p - 1)$$

が成り立つ。

(証明)

ここで、右辺の和は f から分岐する点 $p \in X$ 全体にわたってとる。

$2g - 2$ は因子の次数であるから、定理 6.4 は次の定理 6.5 と命題 6.3 から導かれる。 Q.E.D.

定理 6.5

X 上の正因子 R を

$$R = \sum_{p \in X} (e_p - 1)p$$

によって定義する。 W を Y 上の因子とすれば、 $f^*W + R$ は、 X 上の因子である。

(証明)

Y 上の 2 つの因子は互いに線形同値であるから、ある 1 つの因子について照明すればいい。

そこで、 φ を Y 上の定数でない有理型関数として $W = \text{div}(d\varphi)$ をとる。

このとき、 $\varphi \circ f$ を X 上の有理型関数とみて

$$\text{div}(d(\varphi \circ f)) = f^*W + R \quad (2)$$

であることを示せばよい。そのために $p \in X$, $Q = f(p) \in Y$ として、それぞれの局所座標を z, w とする。 $w = f(z)$ とすれば、

$$d(\varphi \circ f) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(f(z)) \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz \quad (3)$$

である。 $\partial \varphi / \partial w$ は w の局所方程式であるから、右辺のは f^*W の局所方程式である。

また、 $\partial f / \partial z$ は R の局所方程式である。したがって、(3) は p の近傍で (2) が成り立つことを示している。

ここで、 p は任意であったから X 上で (2) が成り立つ。 Q.E.D.

2.7 etc

定義

$L \in \text{Pic}(X)$ が very ample であるとは、埋め込み $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^N$ で、 $L = i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ であることである。

定義

$L \in \text{Pic}(X)$ が ample であるとは、 mL が very ample であるような $m > 0$ が存在することである。

定義

$L \in \text{Pic}(X)$ が直線束で、 $T(X)$ を接 bundle とする。ここで $-K_X = \bigwedge^n T(X)$ は直線束とするとき、 $K_X = -(K_X)$ を X の 標準 bundle (canonical bundle) という。

X, Y は n 次元 smooth projective variety とし $\rho(X) \ni Y$ であるような正則写像 $\rho: X \rightarrow Y$ が存在するとき、 X の各点 P でのパラメーター $x_1, \dots, x_n$, Q での局所パラメーター $y_1, \dots, y_n$ をとり、 $\det \frac{\partial(y_i \circ \rho)}{\partial x_i}$ により定まる X 上の divisor を R とする。 R は ρ によつてのみ定まる。 T_P, T_Q をそれぞれ X の P , Y の Q での接空間としたとき、 ρ により $d\rho_P$ が引き起こされる。

$$d\rho_P: T_P \rightarrow T_Q$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \sum_j \frac{\partial(y_j \circ \rho)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

したがって、 $\text{Supp } R = \{P \in X \mid d\rho_P: T_P \rightarrow T_{\rho_P} \text{ が同型写像でない}\}$

定義

この R を ρ の ramification divisor という。

定理

上のように $\rho: X \rightarrow Y$ および R をとれば、 $K_X = \rho^* K_Y + R$ である。

(証明) [2] 5.2 定理 16 参照

定義

$-K_X$ が ample であるとき、 X は Del Pezzo surface であるという。

定理 (Serre の双対律)

$L \in \text{Pic}(X)$ であるならば、 $H^i(X, L)$ と $H^{n-i}(X, K_X - L)$ は双対空間になっている。

よって、次元が等しいので $h^i(X, L) = h^{n-i}(X, K_X - L)$

(証明) [3] p.244 Corollary 7.7 を参照

定理 (projection formula)

$f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{F}$ を X 上の直線束とし、 $\mathcal{G}$ を Y 上の直線束とするとき

$$f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) = (f_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}$$

が成り立つ。

(証明) [3] p.123 5.1 を参照

定理 (Kodaira's vanishing Theorem)

L が ample ならば、任意の i で、 $h^i(X, K_X + L) = 0$ である。

(証明) [3] p.248 Remark 7.15 を参照

定義

X の irregularity q とは、 $q = h^1(X, \mathcal{O}_X)$

定義

$K_X = \mathcal{O}_X$, $q = 0$ であるとき、 X は K3 surface であるという。

定理 (Noether's formula)

X が smooth projective surface ならば、

$$1 - q(X) + Pg(X) = \frac{1}{12}(c_1^2(X) + c_2(X))$$

(証明) [4] p.20 Theorem(5.4) を参照

定義

X を smooth projective surface として、有理写像 $\Phi_{|mK_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}^N$,
 $N = h^0(mK_X) - 1$ において $\kappa(X) = \max_m \dim \Phi_{|mK_X|} (\leq \dim X)$ となるとき、
 $\kappa(X)$ を小平次元という。

また、 $\kappa(X) = 2$ であるとき、 X を general type という。

K_X が nef のとき、 X は minimal surface という。

定義

X は paracompact topological space で V を X 上の vector bundle としたとき、
 $c_i(V) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ を V の the i -th Chern class という。

また、 $\mathcal{F}_x$ を X の tangent bundle としたとき、

$c_i(\mathcal{F}_x)$ を X の the i -th Chern class といい、 $c_i(X)$ と記す。

定理

X が minimal surface of general type ,

$c_i(X) : X$ の i -th Chern class であるならば、

$$c_1^2(X) > 0 , c_2(X) > 0$$

$$c_1^2(X) \leq 3c_2(X)$$

$$5c_1^2(X) - c_2(X) + 36 \geq 0 \quad (c_1^2(X) \text{ even である場合の Noether's inequality})$$

(証明) [4] p.207 Theorem(1.1) を参照

3 主定理

X は smooth projective surface とする。

$\rho : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^2$ の double covering とする。 B : branch divisor としたとき、 $B \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2b)|$ となる。 $c_i(X)$ を X の i -th Chern class と仮定したとき、

- (1) $b = 1$ のとき、 X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
- (2) $b = 2$ のとき、 X は $K_X^2 = 2$ の Del Pezzo surface
- (3) $b = 3$ のとき、 X は $K3$ surface
- (4) $b \geq 4$ のとき、 X は minimal surface of general type であり、
 $2c_1^2(X) + 42 \leq c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36$ を満たす。

(証明)

X は smooth projective surface で、 $\rho : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^2$ の double covering とする。 $\mathbb{P}^2$ は単連結しているので、 ρ は分岐しなければならない。 すなわち、 branch divisor B は $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2b)|$ に属する。

$K_X = \rho^* K_{\mathbb{P}^2} + R$ において今、 ramification R は $2R = \rho^* B$ であるから、

$K_X = \rho^* K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}\rho^*(B)$ が成り立つ。 $K_X = \rho^* K_{\mathbb{P}^2} + \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b) = \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b-3)$ よって、 $K_X^2 = 2(b-3)^2$ 次に、 $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \rho_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b) \rightarrow 0$ が split exact であることを示す。

$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)) = H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)) = H^1(\mathbb{P}^2, K_{\mathbb{P}^2} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b+3))$

$H^1(\mathbb{P}^2, K_{\mathbb{P}^2} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b+3))$ は Kodaira's vanishing Theorem より 0 になるので、 $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$ よって、 $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \rho_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b) \rightarrow 0$ は split する。

よって、 $\rho_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b)$ である。 ここから b で場合分けしていく。

(1) $b = 1$ の場合、 $K_X = \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ よって $K_X^2 = 8$ である。 $-K_X$ は ample なので、 X は Del Pezzo surface である。 X が $\mathbb{P}^2$ の blow up ならば、 $-1 = K_X E$ をみたす E が存在する。

しかし K_X の偶数性より矛盾するので、 X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

(2) $b = 2$ の場合、 $K_X = \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ よって $K_X^2 = 2$ である。 $-K_X$ は ample なので、 X は Del Pezzo surface である。

(3) $b = 3$ の場合、 $K_X = \mathcal{O}_X$ また、 $q(X) = h^1(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) + h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b))$

ここで、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = K_{\mathbb{P}^2} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ であるので Kodaira's vanishing Theorem より $q(X) = 0$

よって、 X は $K3$ surface

(4) $4 \leq b \leq t$ の場合、 $K_X = \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b-3)$

K_X は ample なので、 mK_X が very ample となる m が存在する。

よって、 $\Phi_{|mK_X|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, $N = h^0(mK_X) - 1$

だから $\kappa(X) = 2$ で、 X は general type である。

また、 K_X は ample なので $K_X C > 0$ だから K_X は nef である。 よって X は minimal surface である。

ここから、 $b \geq 4$ の $c_1^2(X)$, $c_2(X)$ について調べていく。

X は minimal surface of general type なので、 $c_1^2(X) = K_X^2$

また、Noether's formula

$$1 - q(X) + Pg(X) = \frac{1}{12}(c_1^2(X) + c_2(X))$$

であるから、 $q(X) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) + h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b)) = 0$

$Pg(X) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) + h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b)) = h^0(K_{\mathbb{P}^2} - \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b-3)) = \frac{(b-1)(b-2)}{2}$ なので、

これら代入して $c_2(X) = 2(2b^2 - 3b + 3)$

以上から

$$b = 4 \quad (c_1^2(X), c_2(X)) = (2, 46)$$

$$b = 5 \quad (c_1^2(X), c_2(X)) = (8, 76)$$

$$b = 6 \quad (c_1^2(X), c_2(X)) = (18, 114)$$

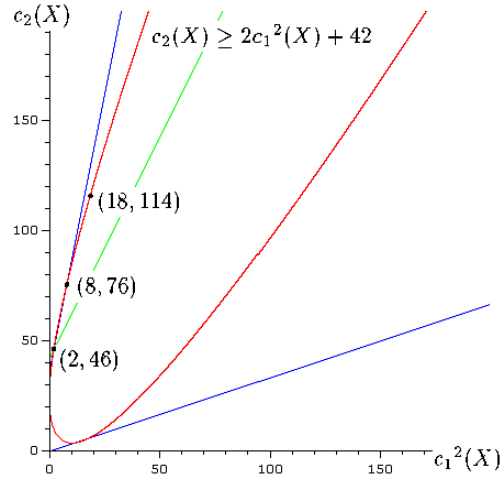
$\vdots$

$$b = t \quad (c_1^2(X), c_2(X)) = (2(t-3)^2, 2(2t^2 - 3t + 3))$$

これらの軌跡を求めると、 $(2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 162c_1^2(X)$ となっている。

これは、 $\frac{5\sqrt{5}}{162}(X - \frac{42\sqrt{5}}{25})^2 = Y - \frac{78\sqrt{5}}{25}$ を回転させたものである。これより、この軌跡の軸の傾きは 2 である。また、 $b = 4, 5$ の場合、Noether's line 上にあるので、 $c_2(X) \geq 2c_1^2(X) + 42$ を満たす。以上より、 $b \geq 4$ であるならば、

$2c_1^2(X) + 42 \leq c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36$ を満たしている。 Q.E.D.



$$c_2(X) \geq 2c_1^2(X) + 42, c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36, (2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 162c_1^2(X)$$

4 他の例

主定理では、 ρ は $\mathbb{P}^2$ への double cover になっていたが、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への double cover にした場合でも、同じような議論で軌跡が求められるので比較してみる。

$\rho : X \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^2$ の double covering とする。このとき、branch divisor B は $|\mathcal{O}(2b, 2b)|$ に属しているとする。 $K_X = \rho^* K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} + \rho^*(B/2) = \rho^* \mathcal{O}(b-2, b-2)$ となる。だから、 $K_X^2 = 4(b-2)^2$
 $b \geq 3$ の X が minimal surface of general type での $c_1^2(X)$, $c_2(X)$ の軌跡を調べる。

X は minimal surface of general type なので、 $c_1^2(X) = K_X^2$

また、Noether's formula

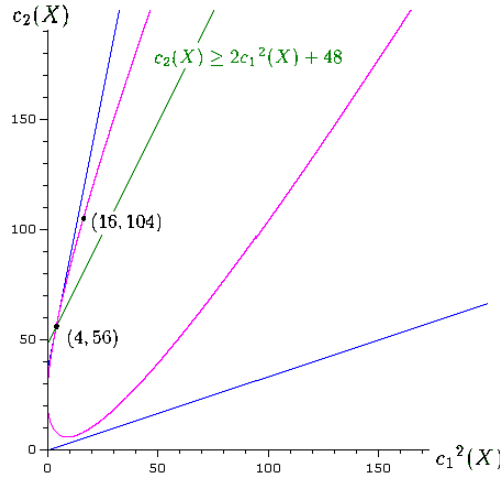
$$1 - q(X) + Pg(X) = \frac{1}{12}(c_1^2(X) + c_2(X))$$

であるから、 $q(X) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}) + h^1(\mathcal{O}(-b, -b)) = 0$

$Pg(X) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}) + h^2(\mathcal{O}(-b, -b)) = h^0(\mathcal{O}(b-2, b-2)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-2))^2 = (b-2+1)^2 = (b-1)^2$
 なので、これら代入して $c_2(X) = 8(b^2 - b + 1)$

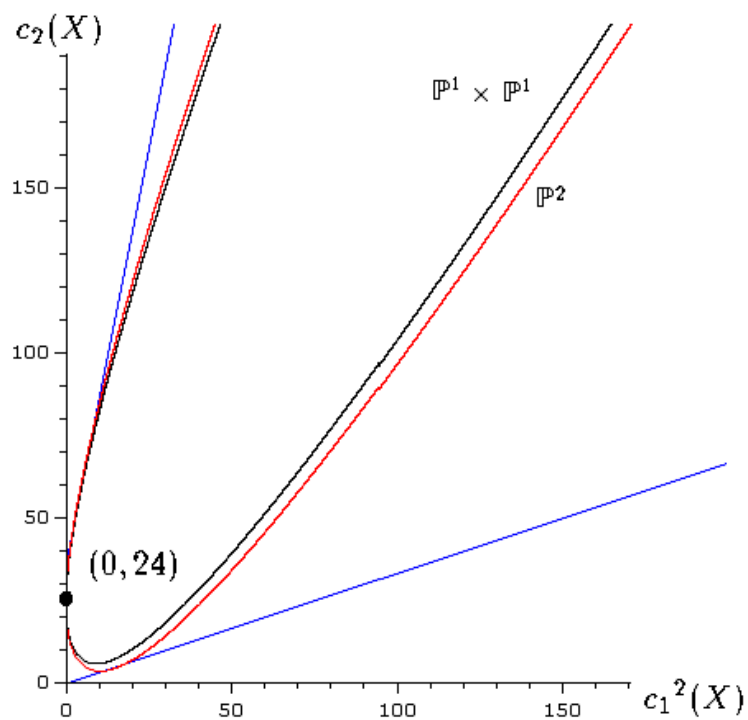
よって軌跡は、 $(2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 144c_1^2(X)$ となっている。この軌跡の軸の傾きは 2 である。
 また、 $b = 3$ の場合、Noether's line 上にあるので、 $c_2(X) \geq 2c_1^2(X) + 48$ を満たす。以上より、 $b \geq 3$ であるならば、

$2c_1^2(X) + 48 \leq c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36$ を満たしている。



$$c_2(X) \geq 2c_1^2(X) + 42, \quad c_2(X) \leq 5c_1^2(X) + 36, \quad (2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 162c_1^2(X)$$

主定理の軌跡と比較すると、軸の傾きが 2 であり、 $(c_1^2(X), c_2(X)) = (0, 24)$ で接している放物線であるという共通点が見られる。そして、 $\mathbb{P}^2$ の軌跡の方が Noether's line に近かった。



$$(2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 162c_1^2(X) \quad \text{と} \quad (2c_1^2(X) - c_2(X) + 24)^2 = 144c_1^2(X)$$

参考文献

- [1] 堀川穎二, 複素代数幾何学入門, 岩波書店, 1990.
- [2] 秋月康夫, 中井喜和, 永田雅宜, 代数幾何学, 岩波書店, 1987.
- [3] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.
- [4] W.Barth, C.Peters, A.Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.