

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への double cover を与える surface X の構造の考察

5107A045-1 丹羽 久

早稲田大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
(楫 元研究室)

2009 年 2 月 1 日

概要

この論文は、タイトルにもあるように $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への double cover を与える surface X について、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の branch locus の次数が低い場合の一部について調べたものです。研究のテーマにした動機は、代数幾何において double cover については昔からあつかわれるテーマで、自分も学部的时候から興味をもってやっていた。修論では surface の double cover の分類というテーマで、対象として今回は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ について調べてみました。

1 準備

X : smooth complex projective surface $\rho: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ double covering
branch locus B を $B \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2a, 2b)|$ ($a, b \geq 0$) とする。

2 主定理

- (1) $a = b = 1$ のとき、
 X は 5 点 blow up による Del Pezzo surface である。
- (2) $a = b = 2$ のとき、
 X は $K3$ surface である。

2.1 定義 (Del Pezzo surface)

surface X において K_X^{-1} が ample であるとき X は Del Pezzo surface であるという。またそれは $\mathbb{P}^2$ を最大 8 点まで blow up して得られる surface であるか $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である、標準因子の自己交点数を調べることで分類でき、1 点 blow up することで自己交点数は 1 減っていく。つまり X が Del Pezzo surface で $K_X^2 = 6$ ならば、 $K_{\mathbb{P}^2}^2 = 9$ であることから 3 点 blow up による Del Pezzo surface であると分類される。

2.2 定義 ($K3$ surface)

surface X にたいして、標準因子 K_X が trivial であり、その irregularity が 0 であるとき X は $K3$ surface である (X の irregularity とは、 $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の値のことである。)

2.3 定義 ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\alpha, \beta)$)

$p: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第 1 成分の $\mathbb{P}^1$ への射影)

$q: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第 2 成分の $\mathbb{P}^1$ への射影)

としたとき

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\alpha, \beta) = p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\beta)$$

とする .

2.4 定理 (小平の消滅定理)

L : ample な因子

$$\Rightarrow (1) \dim H^i(X, K_X \otimes L) = 0 \quad (\forall i > 0)$$

$$(2) \dim H^{n-i}(X, L^{-1}) = 0 \quad (\forall i > 0)$$

2.5 定理 (K_X と K_Y の関係について)

X から Y への正則射でかつ有限射である $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき, 標準因子 K_X は標準因子 K_Y と f の ramification divisor R によって,

$$K_X = f^* K_Y + R$$

で与えられる .

3 証明の流れ

1. 標準因子 K_X を求める .

$$K_X = \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2 + a, -2 + b))$$

2. $a = b = 1$ のとき, 求めた標準因子 K_X^{-1} が ample であることから, surface X が Del Pezzo surface であることを特定し, K_X の自己交点数を求め, 何点 blow up であるかを導く .

$$K_X^2 = 4 \quad \rightarrow \quad 5 \text{ 点 blow up}$$

3. $a = b = 2$ のとき, 求めた標準因子 K_X が trivial であることから, X の irregularity を求め, 0 であることから X が $K3$ surface であることを導く .

参考文献

- [1] 堀川 穎二, 複素代数幾何学入門, 岩波書店, 1990.
- [2] 秋月 康夫・中井 喜和・永田 雅宣, 代数幾何学, 岩波書店, 1987.
- [3] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York 1977.