$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への double cover を与える surface の構造の考察

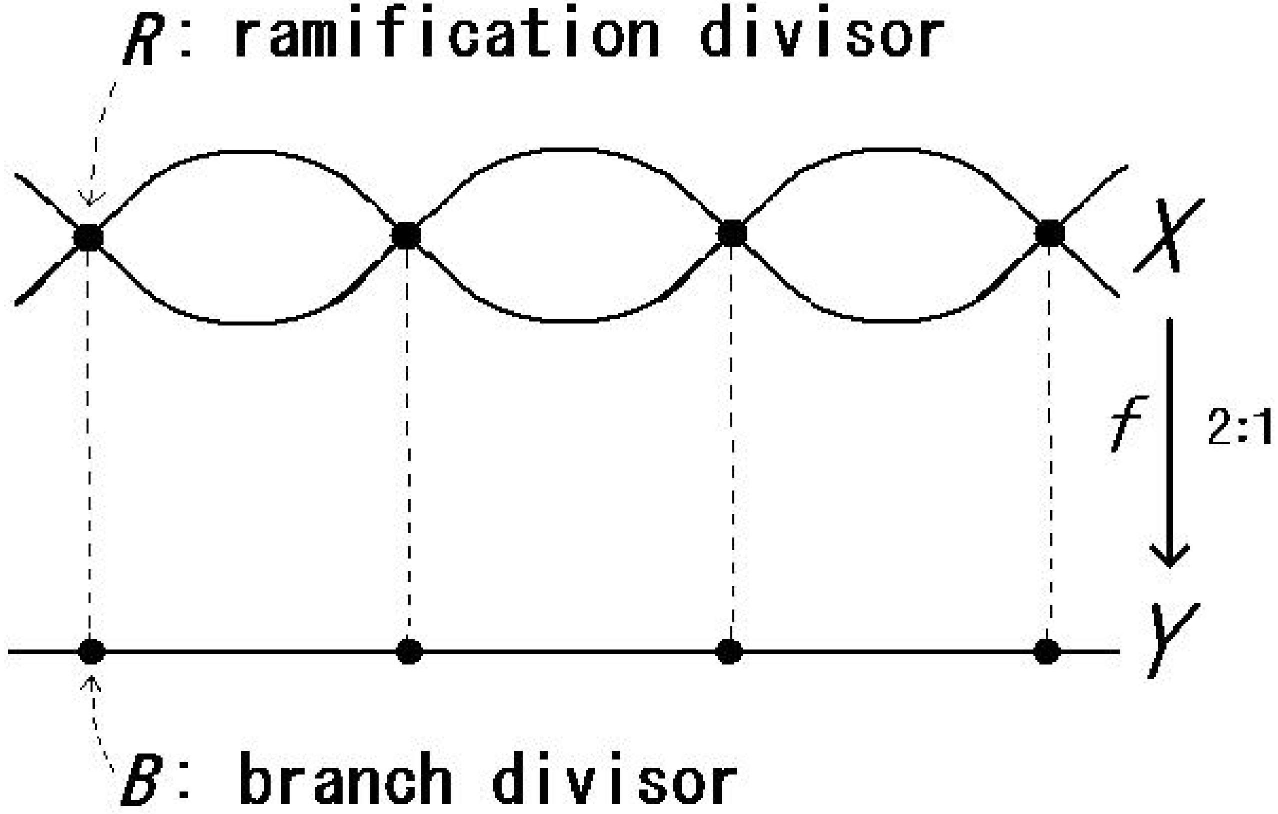
5107A045-1 丹羽　久

早稲田大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

（楫　元研究室）

double cover とは

X, Y: compact Rieman 面



準備

X: smooth complex projective surface

$\rho : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ double covering

$B \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2a, 2b)|$ $(a, b \geq 0)$

主定理

(1) $a = b = 1$ **のとき，**

surface X **は**5**点** blow up **による** Del Pezzo surface **である**.

(2) $a = b = 2$ **のとき，**

surface X **は** $K3$ surface **である**.

定義 1 (Del Pezzo surface)

surface X が Del Pezzo surface

$\Longleftrightarrow \quad \mathsf{K}_X^{-1}$ が ample

（特徴）

blowing up :$X \to \mathbb{P}^2 \qquad K_{\mathbb{P}^2}^2 = 9$

$K_X^2 = 9 - r \Rightarrow r$ 点 blow up $(0 \leqq r \leqq 8)$

または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

定義 2 ($K3$ surface)

surface X が $K3$ surface

$\Longleftrightarrow \quad \mathsf{K}_X = \mathcal{O}_X$ ， $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

定義 3 ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\alpha,\beta)$)

$p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第１成分の $\mathbb{P}^1$ への射影)

$q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第２成分の $\mathbb{P}^1$ への射影)

としたとき

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\alpha,\beta) = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\beta)$$

とする．

定理 1 (小平の消滅定理)

L：ample な因子

$\Longrightarrow$ (1) $h^i(X, K_X \otimes L) = 0\ (\forall i > 0)$

(2) $h^{n-i}(X, L^{-1}) = 0 (\forall i > 0)$

定理 2（K_X と K_Y の関係）

$f : X \to Y$ 正則射かつ有限射

R : f の ramification divisor

$\Longrightarrow$ $K_X = f^*K_Y + R$

(証明)

標準因子 K_X を求める.

$$2R = \rho^* B \quad , \quad K_X = \rho^* K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} + R$$

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} &= p^* K_{\mathbb{P}^1} \otimes q^* K_{\mathbb{P}^1} \\ &= p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore K_X &= \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2, -2)) + \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b)) \\ &= \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2 + a, -2 + b)) \end{aligned}$$

(1) $a = b = 1$

$K_X = \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1)) \implies \mathsf{K}_X^{-1} = \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,1))$

$\therefore$ surface X **は** Del Pezzo surface **である.**

$$
\begin{aligned}
K_X^2 &= (\rho^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1))^2 \\
&= (\deg \rho)(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1))^2 \\
&= 2(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^2 \\
&= 2(0 + 2(-1)(-1) + 0) \\
&= 2 \cdot 2 = 4
\end{aligned}
$$

$\therefore$ surface X **は**5**点** blow up **の** Del Pezzo surface **である**

(2) $a = b = 2$

$K_X = \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_X$

$$
\begin{aligned}
h^1(X, \mathcal{O}_X) &= h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \rho_* \mathcal{O}_X) \\
&= h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2, -2)) \\
&= h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}) \\
&\qquad + h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2, -2)) \\
&= h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 2)) \\
&\qquad + h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 2))^{-1}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ surface$X$ **は** $K3$ surface **である.**

まとめ

$\rho : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $B \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2a, 2b)|$ $(a, b \geq 0)$

(1) $a = b = 1$, 5**点** blow up **による** Del Pezzo surface

(2) $a = b = 2$, $K3$ surface

未解決の問題

- $a, b \geq 3$
- **逆の考察**