$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への double cover を与える surface X の構造の考察

5107A045-1 丹羽　久
早稲田大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
（楫　元研究室）

2009 年 2 月 1 日

1 概要

この論文は，タイトルにもあるように $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への double cover を与える surface X について，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の branch locus の次数が低い場合の一部について調べたものである．研究のテーマにした動機は，代数幾何において double cover については昔からあつかわれるテーマで 自分も学部のころから興味をもってやっていたからである．そこで今回は自分にできる考察の対象として $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ について調べることにした．はじめにこの論文を読む上で必要になる定義，定理をいくつか示し，そのうえで話を進めていきたい．

2　定義，定理

2.1　　複素多様体

M を位相空間とし，M が複素多様体とは次の（1）〜（4）が成立するときをいう

（1）M は連結ハウスドルフ空間

（2）$\forall i \in I \;\; U_i \subset M$ かつ $\;M = \bigcup_{i \in I} U_i$

（3）$\forall i \in I \;\; u_i \subset \mathbb{C}^n \;\; \varphi_i : U_i \longrightarrow u_i$，同相写像

（4）$U_i \cap U_j \neq \phi$ となる $\forall i, \forall j \in I$ について，$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \mid_{u_{ij}}$

また U_i, φ_i をそれぞれ座標近傍，座標関数と呼び，(U_i, φ_i) を座標近傍系と呼ぶ．１次元複素多様体をリーマン面と呼ぶ.

2.2　pre sheaf

X を位相空間とし，Ω を X の開集合全体とすると，$\forall U \in \Omega$ にたいして $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{F}(U)$ が定まる．また $\forall U, \forall V \in \Omega$ のとき　$\gamma_{U,V} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$　準同型写像が定まり，次の（1）〜（3）がいえるとき，$\mathcal{F}$ は pre sheaf という．

（1）$\mathcal{F}(\phi) = \{0\}$

（2）$\gamma_{U,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) = id_{\mathcal{F}(U)}$

（3）$\forall W, U, V \in \Omega \;\; W \subset V \subset U$ のとき $\gamma_{W,U} = \gamma_{W,V} \circ \gamma_{V,U}$ となる，つまり可換である．

また $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ と表し，ここでの $\gamma_{V,U}$ とは下のような制限写像を表す.

$\gamma_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$

$f \in \mathcal{F}(U), \;\; \gamma_{V,U}(f) \in \mathcal{F}(V) \quad f \longmapsto \gamma_{V,U}(f) = f \mid_V$

$\mathcal{F}(U)$ の元を，U 上の f の section(切断）といい，$U = X$ のとき，$\mathcal{F}(X)$ の元を f の global　section（大域切断）という.

2.3　　stalk

f を X 上の pre sheaf, $p \in X$ にたいして $\Omega_p = \{U \in \Omega \mid p \in U\}$ とする．ここで $\bigcup_{U \in \Omega_p} \mathcal{F}(U)$ を互いに交わらない和 (disjoint union) となるようにとる．$a, b \in \bigcup_{U \in \Omega_p} \mathcal{F}(U)$ をとり，今 $a \in \mathcal{F}(U_a), b \in \mathcal{F}(U_b)$ となっているとする.

このとき次の $\sim$ は同値関係である

$a \sim b \Longleftrightarrow \exists W \in \Omega_p \quad s.t \quad W \subset U_a \cap U_b \qquad a \mid_W = b \mid_W$

そして $\mathcal{F}_p = (\bigcup_{U \in \Omega_p} \mathcal{F}(U))/\sim$ とし，これを，$\mathcal{F}$ の p での stalk という.

$a \in \mathcal{F}(U)$ の定める $\mathcal{F}_p$ の元を a_p であらわし，a の p における germ という.

これらの定義をまとめると次のとおりである.

$\forall \alpha \in \mathcal{F}_p \;\; \exists U \in \Omega_p \;\; \exists a \in \mathcal{F}(U) \;\; s.t \;\; a_p = \alpha$

2.4 sheaf

$\mathcal{F}$ が sheaf とは，pre sheaf であり，さらに次が成立するときをいう

$\forall U \in \Omega \quad U = \bigcup_{i \in I} U_i \quad U_i$ の開被覆とする

（1）$f \in \mathcal{F}(U) \qquad \forall i \in I \qquad \gamma_{U_i,U}(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$

（2）$(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \quad s.t \forall i, j \qquad \gamma_{U_i \cap U_j, U_i}(f_i) = \gamma_{U_i \cap U_j, U_j}(f_j)$

$$\Longrightarrow \exists f \in \mathcal{F}(U) \;\; s.t \qquad \forall i \in I \qquad f|_{U_i} = f_i$$

以上が成立するとき $\mathcal{F}$ は X の sheaf である．また sheaf の stalk は pre sheaf のそれである．

2.5 sheaf の exact sequence

$\mathcal{F}_i$ を X 上の sheaf とし，$\varphi_i : \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1}$ を sheaf の間の準同型写像とする．このとき

$\ldots \xrightarrow{\varphi_{i-2}} \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \ldots$ が exact sequence であるとは

$\Longleftrightarrow \forall p \in X$ に対して，それらの stalk 間の準同型写像

$\ldots \xrightarrow{\varphi_{i-2,p}} \mathcal{F}_{i-1,p} \xrightarrow{\varphi_{i-1,p}} \mathcal{F}_{i,p} \xrightarrow{\varphi_{i,p}} \mathcal{F}_{i+1,p} \xrightarrow{\varphi_{i+1,p}} \ldots$ が exact sequence であるときをいう

ここで次の sheaf の系列を考える

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ これが exact sequence であるとき（これが exact sequence であることは α_p が単射 β_p が全射であることからいえる)，次の系列は exact sequence である．

$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow$（証明は省略）

このうえで $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ としたときの $Ker\varphi$，$Im\varphi$，$Coker\varphi$ を定義する．

$Ker\varphi$ とは次の（1），（2）が成立するときをいう

（1）$Ker\varphi$ は X 上の sheaf

（2）$0 \longrightarrow Ker\varphi \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ が exact sequence

また, $(Ker\varphi)_p = Ker\varphi_p$ である

$Coker\varphi$ とは次の（1），（2）が成立するときをいう

（1）$Coker\varphi$ は X 上の sheaf

（2）$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow Coker\varphi \longrightarrow 0$ が exact sequence

また，$(Coker\varphi)_p = Coker\varphi_p$ である

$Im\varphi$ とは次の（1），（2）が成立するときをいう

（1）$Im\varphi$ は X 上の sheaf

（2）$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} Coker\varphi \longrightarrow 0$ が exact sequence

このとき $Im\varphi = Ker\pi$ である．また $(Im\varphi)_p = Im\varphi_p$ である．

2.6 コホモロジー群

X を位相空間とし，Ω を X 上の開集合全体とする．$\mathcal{F}$ を X 上の sheaf で $\mathcal{F}$ は flabby であるとする．（$\Longleftrightarrow \quad \forall U \in \Omega \;\; \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\gamma_{U,X}} \mathcal{F}(U)$ が全射）

$U \in \Omega$ にたいして，$C^0(\mathcal{F})(U) = \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$ とおくと，これは $\gamma_{V,U}$ を自然な射影で定義すれば X 上の sheaf でかつ flabby である．

ここで $\iota : \mathcal{F} \longrightarrow C^0(\mathcal{F})$ という写像の $Ker\iota$ を調べると，$Ker\iota = 0$ となる．つまり

$0 \longrightarrow Ker\iota \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} C^0(\mathcal{F})$ が exact sequence であったので

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} C^0(\mathcal{F})$ が exact sequence であるということである

ここで $\mathcal{F}$ が flabby resolution というのを定義したい

$\mathcal{F}$ が flabby resolution とは $\forall \eta^m (m \geq 0)$ が flabby で

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \eta^0 \longrightarrow \eta^1 \longrightarrow \dots$

が exact sequence となることである

$\mathcal{F}$ が flabby resolution とする

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota^0} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi^0} Coker\iota \longrightarrow 0$

この exact sequence にたいして $C^1(\mathcal{F}) = C^0(Coker\iota^0)$ とし，$C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota^1} C^1(\mathcal{F})$，$\delta^0 = \iota^0 \circ \pi^0$ とすると

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$

となる exact sequence ができる．これを $\mathcal{F}$ の canonical flabby resolution と呼ぶ

また一般に sheaf の exact sequence$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ に対して次がいえる

$\forall U \in \Omega \quad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$ について $Im\alpha_U \subset Ker\beta_U (\beta_U \circ \alpha_U = 0)$ である（複体）

よって canonical flabby resolution と上のことから次の exact sequence が複体となる

$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} \Gamma(X, C^0(\mathcal{F})) \xrightarrow{\delta^0} \Gamma(X, C^1(\mathcal{F})) \xrightarrow{\delta^1} \Gamma(X, C^2(\mathcal{F})) \longrightarrow \dots \quad (\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0)$

そこで $H^q(X, \mathcal{F}) = Ker\delta^q / Im\delta^{q-1}$ とし，これを $\mathcal{F}$ の q 次コホモロジー群と呼ぶ ($H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ である)

2.7 因子

M を複素多様体とし，M の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と，各 U_i 上与えられた 0 でない有理系関数 φ_i を考える．

さらに $U_i \cap U_j \neq \phi$ のとき，各 $U_i \cap U_j$ 上で　$\varphi_i = g_{ij}\varphi_j$ となる $U_i \cap U_j$ 上の正則関数 g_{ij} で 0 にならないものが存在すると仮定する．これらの条件を満たす系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ を因子の局所方程式系と呼ぶ

二つの因子の局所方程式系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$，$\{(V_\lambda, \eta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ をあたえ

$U_i \cap V_\lambda \neq \phi$ なる任意の $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ に対して φ_i / η_λ が $U_i \cap V_\lambda$ 上 0 にならない正則関数であるとき，これら二つの局所方程式系は同値であると定義する．この同値関係による同値類のことを M の因子とよぶ．

2.8 変換関数系

M の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$，$U_i \cap U_j \neq \phi$ なる $i, j \in I$ に対して，$U_i \cap U_j$ 上 0 にならない正則関数 g_{ij} が与えられているとする．g_{ij} が

$g_{ii} = 1 \quad U_i \cap U_j \cap U_k$ 上 $g_{ij} = g_{ij} g_{jk}$

をみたすとき $\{g_{ij}\}$ を開被覆 $\{U_i\}$ に属する変換関数系とよぶ．同じ開被覆に属する変換関数系 $\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$ が同値であるとは，各 U_i 上 0 にならない正則関数 u_i が存在して $U_i \cap U_j$ 上で

$g_{ij} = u_i^{-1} h_{ij} u_j$
みたすことであると定義する

2.9 ample

X 上の因子 L が ample であるとは，X 上の sheaf$\mathcal{F}$ で $\mathbb{N} \ni \exists n_0 > 0, \forall n \geqq n_0$ に対して，$\mathcal{F} \otimes L^n$ が global section により生成される．

2.10 very ample

X 上の因子 L が very ample であるとは，$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ の埋め込みにより，$L = i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ となることである．

また L が ample であることと，$L^m(\exists m)$ が very ample であることは同値である．

2.11 セールの双対律

X を複素多様体とし，L を X 上の因子とする．$\dim X = n$ とする．このとき次が成立する．
$H^i(X, L)$ と $H^{n-i}(X, K_X \otimes L^{-1})$ は双対空間であり，その次元は等しいつまり
$h^i(X, L) = h^{n-i}(X, K_X \otimes L^{-1})$

2.12 小平の消滅定理

L を ample な因子とする．このとき次のことが成立する．
(1)$h^i(X, K_X \otimes L) = 0$ $(\forall i > 0)$
(2)$h^{n-i}(X, L^{-1}) = 0 (\forall i > 0)$
(1) と (2) は上でのべたセールの双対律によって同値のことであることがいえる．([2] の Remark 7.15 参照)

2.13 Del Pezzo surface

surface$X$ が Del Pezzo surface であるとは，ample な因子 L に対して

$$K_X \otimes L = \mathcal{O}_X$$

となるものである．またそれは $\mathbb{P}^2$ を最大 8 点まで blow up して得られる surface であるか，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である．標準因子の自己交点数を調べることで分類でき, 1 点 blow up することで自己交点数は 1 減っていく．つまり X が Del Pezzo surface で $K_X^2 = 6$ ならば，$K_{\mathbb{P}^2}^2 = 9$ であることから 3 点 blow up による Del Pezzo surface であると分類される．

2.14 $K3$ surface

surface$X$ にたいして，標準因子 K_X が trivial であり，その irregularity が 0 であるとき X は $K3$ surface である

2.15 ramification divisor

X, Y を n 次元 smooth projective surface とし，$\varphi : X \to Y$ を正則写像とする．このとき X の各点 P での局所パラメーター $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ および $Q = \varphi(P)$ での局所パラメーター $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ をとって，$\det(\frac{\partial(y_i \circ \varphi)}{\partial x_i})$ によって定義される X 上の因子を R とする．あきらかに，R は局所パラメーターのとり方とは無関係で，φ によってのみ定まる．また，T_P を X の P での接空間，T_Q を Y の Q での接空間とすると，φ によって T_P から T_Q への線形写像 $d_{\varphi_P} : T_P \ni \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \sum_j \frac{(\partial y_i \circ \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \in T_Q$ が引き起こされ，$\mathrm{Supp} R = \{P \in X | d_{\varphi_P} : T_P \to T_Q$が同型写像でない$\}$ である．この R を φ の ramification divisor という．

2.16 標準因子 K_X と K_Y の関係

2.15 のように $\varphi : X \to Y$ および R をとれば，$K_X = \varphi^*(K_Y) + R$ である．
証明は [2]，5.2 を参照

3 本題

X を smooth projective variety とし，$\rho : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ double covering とする．$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の第 1 成分への射影を $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ とし，第 2 成分への射影を $g : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ とする．これにより，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\alpha,\beta)$ を次のように与える．$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\alpha,\beta) = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha) \otimes g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\beta)$ とする．これを用いて，branch locus B を $B \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2a,2b)|$ $(a,b \geq 0)$ とする．

Main Theorem

(1)$a = b = 1$ のとき，

surface$X$ は 5 点 blow up による Del Pezzo surface である．

(2)$a = b = 2$ のとき，

surface$X$ は $K3$ surface である．

Proof of Theorem

まずは surface X の構造を調べるうえで必要な標準因子 K_X を求めたい．今 ρ が double cover であるので ramification divisor R は $2R = \rho^*B$ となることから，$K_X = \rho^*K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} + (\frac{1}{2})\rho^*(B)$ となる．

そこでまず $K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$ がどうなっているか見てみると，これは最初に与えた射影 p, g を用いることで $K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} = p^*K_{\mathbb{P}^1} \otimes g^*K_{\mathbb{P}^1}$ とあらわせる．

また $K_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ であることから $p^*K_{\mathbb{P}^1} \otimes g^*K_{\mathbb{P}^1} = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ よって $K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-2,-2)$

を得られる．B$\in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2a,2b)|$ $(a,b \geq 0)$ であることを考慮すると標準因子 K_X は

$$\begin{aligned} K_X &= \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-2,-2) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)) \\ &= \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-2+a,-2+b)) \end{aligned}$$

である．

(1)$a = b = 1$ のとき $K_X = \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1))$ よって $K_X \otimes \rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1)) = \mathcal{O}_X$ となる．$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1)$ は very ample であるので定義より当然 ample である．また ρ によって引き戻された $\rho^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1))$ も ample である．

よって X は Del Pezzo surface である．

そこで K_X の自己交点数 K_X^2 を求めると，$K_X^2 = (\rho^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1))^2 = \deg\rho(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1))^2 = 2(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^2 = 2((p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^2 + 2(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))(g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) + (g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^2) = 2(0 + 2(-1)(-1) + 0) = 2 \cdot 2 = 4$ をえることから，X は 5 点 blow up による Del Pezzo surface である

(2)$a = b = 2$ のとき $K_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,0) = \mathcal{O}_X$ つまりこのとき標準因子が trivial である．そこで $\mathcal{O}_X$ の irregularity $h^1(\mathcal{O}_X)$ を求めたい

今 ρ が double covering の写像であることから exact sequence $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \to \rho_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-a,-b) \to 0$ が存在し，$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-a,-b), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-a,-b) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)) = H^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)) = H^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2+a,2+b)) = 0$ となることから，この exact sequence は split し

$\rho_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-a,-b)$ となる．$h^1(\mathcal{O}_X) = \dim H^1(X,\mathcal{O}_X) = \dim H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, \rho_*\mathcal{O}_X)$ であることを考慮して，今の結果と $a = b = 2$ という条件を代入して計算すると $h^1(\mathcal{O}_X) = \dim H^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-2,-2)) = \dim H^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) + \dim H^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-2,-2)) = \dim H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,2)) + \dim H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, -\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,2))$ を得られる．

よって $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,2)$ は ample であることから小平の消滅定理より $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ となる．

標準因子が trivial でその irregularity が 0 であるので，X は $K3$ surface である．

参考文献

[1] 堀川穎二, 複素代数幾何入門, 岩波書店, 1990.

[2] 秋月康夫・中井喜和・永田雅宣, 代数幾何学, 岩波書店, 1987.

[3] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer,New York 1977.