

任意標数における Veronese variety の higher secant variety の定義方程式について

基幹理工学研究科 数学応用数理専攻 修士課程 2 年 5107A007-1

伊藤 達哉

指導教員名 楫 元

Abstract

本論文は, 任意標数の代数閉体上で Veronese variety の n -secant variety が, ある対称行列の $(n+2) \times (n+2)$ 小行列式全体の零点集合になることを示したものである. これは $\text{ch}(k) \neq 2$ の場合は知られている結果であり, 新しい結果は $\text{ch}(k) = 2$ に対してである. 但し, 証明は任意標数で与えている.

Introduction

本論文では任意標数における代数閉体上の Veronese variety の n 次 secant variety について考える. 本研究の発端は, R. Gattazzo(1984) [1] である. [1] では, $\text{ch}(k) \neq 2$ において, Veronese variety の secant variety が, ある対称行列の 3×3 小行列式全体の零点集合で与えられることを証明している. さらに $\text{ch}(k) = 2$ では, 反例があるとしてあるが, この反例には不備あり, 実際には反例になっていない.

本論文では [1] の誤りを指摘した上で, 任意標数における証明を与えた. さらに higher secant variety の定義方程式も求めた. $\text{ch}(k) \neq 2$ では secant variety と閉包を取る前の集合が一致しているが, $\text{ch}(k) = 2$ ではこれらは一致していない. この $\text{ch}(k) = 2$ 特有の現象が主定理を示す上での問題となっている. さらに主定理の応用として, $\text{ch}(k) = 2$ において 1 次元の場合に成り立つ rank と次数付き Betti 数の関係が, 高次元で成り立たない例を与えた.

Main Theorem.

$\text{ch}(k) \geq 0$, $V_2^m \subset \mathbb{P}^{N:=\binom{m+2}{2}-1}$ を Veronese variety とする. この時, $n \geq 0$ に対して,

$$\text{Sec}^n(V_2^m) = V(I_{n+2}(\Omega)).$$

基礎体 k は代数閉体とし, 特に断らない限り $\text{ch}(k) \geq 0$ とする.

Definition 1 (Veronese variety). $\nu_2 : \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{N:=\binom{m+2}{2}-1}; (x_0 : x_1 : \dots : x_m) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : \dots : x_m^2)$ と書くとき, その像 $V_2^m := \nu_2(\mathbb{P}^m)$ と書き, Veronese variety という.

Definition 2 (Higher secant variety). $X \subset \mathbb{P}^N$ を smooth projective variety とする. X の n -secant variety $\text{Sec}^n(X)$ とは,

$$\text{Sec}^n(X) := \overline{\text{Sec}^n(X)}^\circ \subseteq \mathbb{P}^N, \text{Sec}^n(X)^\circ := \bigcup_{x_0, \dots, x_n \in X} \langle x_0, \dots, x_n \rangle.$$

但し, $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ は $x_0, \dots, x_n$ で張られる線形部分空間. 特に $n = 1$ の時は $\text{Sec}(X) := \text{Sec}^1(X)$ と書き, X の secant variety という.

Notation 1. R を単位的可換環, R を成分として持つ行列 A に対して,

$$I_t(A) := \langle A \text{ の } t \times t \text{ 小行列全体} \rangle \text{ (} R \text{ 上で生成されるイデアル)}.$$

Notation 2. $V_2^m \subset \mathbb{P}^N = \binom{m+2}{2} - 1$ を考える上で,

$$Z = (Z_{00} : Z_{01} : Z_{02} : \cdots : Z_{ij} : \cdots : Z_{m-1m} : Z_{mm}) \in \mathbb{P}^N \quad (0 \leq i \leq j \leq m),$$

$$\Omega(Z) := \begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & \cdots & Z_{0m} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1m} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m0} & Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{但し, } Z_{ji} = Z_{ij}),$$

と表すことで, $\mathbb{P}^N$ の斉次座標を $(m+1) \times (m+1)$ 対称行列で書くことができる. 以下, Ω はこの斉次座標に対応する行列を表し, $\mathbb{P}^N$ の任意の点もこれに基づいて行列表示を適宜考えることにする.

Proposition 1. $V_2^m = V(I_2(\Omega))$.

Proposition 2 (R. Gattazzo(1984) [1]).

- (i) $\text{ch}(k) \geq 0$ に対して, $\text{Sec}(V_2^m) \subseteq V(I_3(\Omega))$.
- (ii) $\text{ch}(k) \neq 2$ に対して, $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$.

Remark 1. さらに, [1] には以下のような注意が書いてある.

NOTE 2. もし標数が 2 の時, (ii) は成り立たない. $m = 2$ でその反例があり,

$R := (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) \in V(I_3(\Omega)) \setminus \text{Sec}(V_2^2)$ となっている.

しかし実際にはこれは誤りで, R は $(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ の接線にのり, $R \in \text{Sec}(V_2^2) \setminus \text{Sec}(V_2^2)^\circ$ である.

Remark 2 ($\text{ch}(k) = 2$ の現象).

- (i) $\text{ch}(k) \neq 2$ の時, $\text{Sec}(V_2^m) = \text{Sec}(V_2^m)^\circ$.
- (ii) $\text{ch}(k) = 2$ の時, $\text{Sec}(V_2^m) \neq \text{Sec}(V_2^m)^\circ$.

Application

Definition 3. $V_d^1 := \nu_d(\mathbb{P}^1)$, $\nu_d : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d$, $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \cdots : x_1^d)$.

Definition 4 (Rank). $P \in X \subseteq \mathbb{P}^N$, $\text{rk}_X(P) := \min\{n \mid P \in \text{Sec}^n(X)\}$.

Definition 5 (次数付き Betti 数). $B(X) := (\beta_{ij}(X))$.

$F_i = \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{ij}(X)}$, $0 \longrightarrow F_s \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow I_X \longrightarrow 0$ (minimal free resolution).

Proposition 3 (E. Park(2007) [2]). $\text{ch}(k) \geq 0$, $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^d \setminus \text{Sec}(X)$, $X := V_d^1$ に対して,

$$\text{rk}_X(P_1) = \text{rk}_X(P_2) \iff B(\pi_{P_1}(X)) = B(\pi_{P_2}(X)).$$

Example.

$\text{rk}_{V_2^4}(P_1) = \text{rk}_{V_2^4}(P_2) = 3$ を満たす $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^{14} \setminus \text{Sec}(V_2^4)$ が存在して,

- (i) $\text{ch}(k) = 2$, $B(\pi_{P_1}(V_2^4)) \neq B(\pi_{P_2}(V_2^4))$.
- (ii) $\text{ch}(k) = 0, 3$, $B(\pi_{P_1}(V_2^4)) = B(\pi_{P_2}(V_2^4))$.

References

- [1] R. Gattazzo : In characteristic $p = 2$ the Veronese variety $V^m \subset \mathbb{P}^{m(m+3)/2}$ and each of its generic projection is set-theoretic complete intersection, Complete intersections (Acireale, 1983), 221–228, Lecture Notes in Math., 1092, Springer, Berlin, 1984.
- [2] E. Park : Projective curves of degree = codimension+2. *Math. Z.* 256 (2007), no. 3, 685–697.