

2008 年度 修士論文

**任意標数における Veronese variety の
higher secant variety の定義方程式について**

基幹理工学研究科 数学応用数理専攻 修士課程 2 年

5107A007-1 伊藤 達哉

指導教員名 楫 元

提出日 2009 年 2 月 4 日

Contents

1	Introduction	2
2	Definition and notation	3
2.1	Definition	3
2.2	Notation	3
3	Preliminaries	4
3.1	Veronese variety	4
3.2	Remarks on characteristic two	5
3.3	Key lemma	8
4	Main theorem	12
4.1	Secant variety	13
4.2	Higher secant variety	16
5	Application	19
5.1	Singular の計算プログラム	21
5.2	Singular による計算結果	22
6	Conjectures	23

Abstract

本論文は, 任意標数の代数閉体上で Veronese variety の n -secant variety が, ある対称行列の $(n+2) \times (n+2)$ 小行列式全体の零点集合になることを示したものである. これは $\text{char}(k) \neq 2$ の場合では知られている結果であり, 新しい結果は $\text{char}(k) = 2$ に対してである. 但し, 証明は任意標数で与えている.

1 Introduction

本論文の扱う Veronese variety V_2^m とは, $\mathbb{P}^m$ の 2-uple embedding の像のことである. smooth projective variety X に対して n -secant variety $\text{Sec}^n(X)$ とは, X の $n+1$ 点で張られる線形部分空間のすべての和集合の Zariski 閉包をとった variety のことである. 特に $n=1$ の時は, secant variety といい $\text{Sec}(X)$ と書く.

Secant variety の一つの応用として, smooth projective variety $X \subset \mathbb{P}^N$ における一般の点 $P \in \mathbb{P}^N \setminus X$ からの射影 π_P を考える. このとき X と $\pi_P(X)$ が同型となるのは, 点 P が $\text{Sec}(X)$ に含まれていないことが必要十分であるということが良く知られている. したがって, $\text{Sec}(X)$ の定義イデアルが分かれば, 同型を与える射影の点を具体的に与えることができる.

一般の smooth projective variety に対して, secant variety の定義イデアルの具体的な記述は知られていないが, いくつかの variety に関してはその定義イデアルが知られている. $\text{char}(k) = 0$ をみたく基礎体 k 上の Veronese variety V_2^m もそのひとつであり, $I(\text{Sec}(V_2^m))$ は斉次座標に対応するある対称行列 Ω のすべての 3×3 小行列式で生成されるイデアルとなることが知られている. これを零点集合で書けば, $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$ である. $\text{char}(k) > 0$ の V_2^m に対しても $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$ が得られることが期待される. 実際 R. Gattazzo [2] には, $\text{char}(k) \neq 2$ に対しても $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$ が成り立つことが示されている. さらに [2] は, $\text{char}(k) = 2$ の時 $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$ が成り立たないとして反例も挙げてある. しかし, 実際この例は secant line にのらないが, tangent line にのることが分かり, 反例にはなっていないことが分かる (この考察に関しては, 4.2 参照). そこで tangent line まで含めて議論すれば, $\text{char}(k) = 2$ の時に関しても $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$ が成り立つのではないかと考えた. 本論文の主結果は以下の通り:

Main Theorem. $\text{char}(k) \geq 0$, $V_2^m \subset \mathbb{P}^{N:=\binom{m+2}{2}-1}$ を Veronese variety とする. この時, $n \geq 0$ に対して,

$$\text{Sec}^n(V_2^m) = V(I_{n+2}(\Omega))$$

が成り立つ. 但し, Ω は $\mathbb{P}^N$ の斉次座標に対応する対称行列で, $\mathbb{P}^N$ の斉次座標を,

$$Z = (Z_{00} : Z_{01} : Z_{02} : \cdots : Z_{ij} : \cdots : Z_{m-1m} : Z_{mm}) \in \mathbb{P}^N \quad (0 \leq i \leq j \leq m),$$

と書いたとき,

$$\Omega(Z) := \begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & \cdots & Z_{0m} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1m} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m0} & Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{但し, } Z_{ji} = Z_{ij})$$

と表す. また $I_t(\Omega)$ は Ω のすべての $t \times t$ 小行列式で生成されるイデアル.

主定理の secant variety に関する新しい結果は, $\text{char}(k) = 2$ の時のみであるが, 証明は任意標数で与えているところがポイントである. また主定理は secant variety だけでなく higher secant variety に関しても小行列式で定義イデアルを記述できることを言及している.

実は $\text{char}(k) \neq 2$ の時, $\text{Sec}(V_2^m)$ と閉包を取る前の集合 $\text{Sec}^\circ(V_2^m)$ が一致していることが, [2] の証明を見ればわかる (Remark 3.4). しかし, $\text{char}(k) = 2$ の時ではこれらは一致していない. この $\text{char}(k) = 2$ 特有の現象がこの定理を示す上での問題となっている. 定理の証明では, Ω の対角成分に注目し, secant variety と tangent variety の双方を見ることで任意標数における証明を与えることができた. また主定理の応用として, $\text{char}(k) = 2$ において 1 次元の場合に成り立つ rank と次数付き Betti 数の関係が, 高次元で成り立たない例を与えた. 最後に主定理の次数に関する予想を書いた.

2 Definition and notation

2.1 Definition

基礎体 k は代数閉体とし, 特に断らない限り $\text{char}(k) \geq 0$ とする.

Definition 2.1 (Veronese variety). $\nu_2 : \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{N := \binom{m+2}{2}-1}; (x_0 : x_1 : \dots : x_m) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : \dots : x_m^2)$ と書くとき, その像 $V_2^m := \nu_2(\mathbb{P}^m)$ と書き, **Veronese variety** という.

Definition 2.2 (Higher secant variety). $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を smooth projective variety とする. X の n -**secant variety** $\text{Sec}^n(X)$ とは, X の $n+1$ 点で張られ線形部分空間の和集合 $\text{Sec}^n(X)^\circ$ の $\mathbb{P}^N$ における Zariski 閉包である. すなわち,

$$\text{Sec}^n(X) := \overline{\text{Sec}^n(X)^\circ} \subseteq \mathbb{P}^N, \quad \text{Sec}^n(X)^\circ := \bigcup_{x_0, \dots, x_n \in X} \langle x_0, \dots, x_n \rangle.$$

但し, $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ は $x_0, \dots, x_n$ で張られる線形部分空間. 特に $n = 1$ の時は $\text{Sec}(X) := \text{Sec}^1(X)$ と書き, X の **secant variety** という.

$X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ を smooth projective variety とする. この時,

$$\text{Sec}(X, Y)^\circ := \{z \in \mathbb{P}^N \mid z \in \langle x, y \rangle, x \in X, y \in Y, x \neq y\}$$

と定義する. 特に $X = Y$ の時 $\text{Sec}(X) = \overline{\text{Sec}(X, X)^\circ} \subseteq \mathbb{P}^N$ である.

Definition 2.3 (Tangent variety). $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を smooth projective variety とする. X の **tangent variety** とは,

$$\text{Tan}(X) := \bigcup_{P \in X} \mathbb{T}_P X.$$

但し, $\mathbb{T}_P X$ は $P \in X$ における X の projective tangent space.

2.2 Notation

Notation 2.4. $V_2^m \subset \mathbb{P}^{N = \binom{m+2}{2}-1}$ を考える上で, 斉次座標

$$Z = (Z_{00} : Z_{01} : Z_{02} : \dots : Z_{ij} : \dots : Z_{m-1m} : Z_{mm}) \quad (0 \leq i \leq j \leq m)$$

とにおいて,

$$\Omega(Z) := \begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & \cdots & Z_{0m} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1m} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m0} & Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{但し, } Z_{ji} = Z_{ij})$$

と表すことで, $\mathbb{P}^N$ の斉次座標を $(m+1) \times (m+1)$ 対称行列で書くことができる. 以下, Ω はこの斉次座標に対応する行列を表し, $\mathbb{P}^N$ の任意の点もこれに基づいて行列表示を適宜考えることにする.

Notation 2.5. R を単位的可換環, R を成分として持つ行列 A に対して,

$$I_t(A) := \langle A \text{ の } t \times t \text{ 小行列全体} \rangle \quad (R \text{ 上で生成されるイデアル})$$

と書くことにする. また $V(I_t(\Omega)) := \{Z = (Z_{00} : \cdots : Z_{mm}) \in \mathbb{P}^N \mid \Omega(Z) \text{ のすべての } t \times t \text{ 小行列式が } 0\}$ である.

3 Preliminaries

3.1 Veronese variety

Proposition 3.1. $\text{char}(k) \geq 0$ に対して,

$$V_2^m = V(I_2(\Omega)).$$

これは良く知られているが, 適当な参考文献が無いので証明を与える.

Proof. ($\subseteq$) $R \in V_2^m$ とすると, ある $(x_0 : x_1 : \cdots : x_m) \in \mathbb{P}^m$ が存在して, $\nu_2(x_0 : x_1 : \cdots : x_m) = R \in \mathbb{P}^N$ とかける. なので, R に対応する行列は,

$$R = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 & \cdots & x_0x_m \\ x_1x_0 & x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_m \\ x_2x_0 & x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_mx_0 & x_mx_1 & x_mx_2 & \cdots & x_m^2 \end{pmatrix}$$

となる. この行列の任意の 2×2 小行列式は,

$$\begin{vmatrix} x_{i_1}x_{j_1} & x_{i_1}x_{j_2} \\ x_{i_2}x_{j_1} & x_{i_2}x_{j_2} \end{vmatrix} = x_{i_1}x_{j_1}x_{i_2}x_{j_2} - x_{i_1}x_{j_2}x_{i_2}x_{j_1} = 0 \quad (0 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq m)$$

よって,

$$R \in V(I_2(\Omega)).$$

($\supseteq$) 任意の $R = (r_{ij}) \in V(I_2(\Omega))$ に対して, もし 任意の i に対して $r_{ii} = 0$ とすると, 対称性より $r_{ij} = r_{ji}$ にであることを注意すれば,

$$0 = \begin{vmatrix} r_{ii} & r_{ij} \\ r_{ji} & r_{jj} \end{vmatrix} = r_{ij}^2 \quad (0 \leq i < j \leq m)$$

なので, $r_{ij} = 0$ となり $R \in \mathbb{P}^N$ に反する. よってある i が存在して $r_{ii} \neq 0$. 対称性より, $r_{00} \neq 0$ と仮定しても一般性を失わない.

$$0 = \begin{vmatrix} r_{00} & r_{0j} \\ r_{i0} & r_{ij} \end{vmatrix} = r_{00}r_{ij} - r_{0i}r_{0j} \quad (0 \leq i < j \leq m)$$

である. そこで $(r_{00} : r_{01} : \cdots : r_{0m}) \in \mathbb{P}^m$ とおくと,

$$\nu_2((r_{00} : r_{01} : \cdots : r_{0m})) = (r_{0i}r_{0j})_{\{0 \leq i \leq j \leq m\}} = (r_{00}r_{ij})_{\{0 \leq i \leq j \leq m\}} = R \in \mathbb{P}^N.$$

よって,

$$R \in V_2^m.$$

□

Proposition 3.2. $\text{Sec}(V_2^m) = \text{Tan}(V_2^m)$.

proof. F. L. Zak [11] など. □

3.2 Remarks on characteristic two

Proposition 3.3 (R. Gattazzo(1984) [2]).

(i) $\text{char}(k) \geq 0$ に対して,

$$\text{Sec}(V_2^m) \subseteq V(I_3(\Omega)).$$

(ii) $\text{char}(k) \neq 2$ に対して,

$$\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega)).$$

Proof. (i) **Claim** $[\text{Sec}(V_2^m)^\circ \subseteq V(I_3(\Omega)).]$

これが示されれば, 両辺の閉包をとることで (i) が従う. よって Claim を示す. 任意の $R = (r_{ij}) \in \text{Sec}(V_2^m)^\circ \subset \mathbb{P}^N$ に対して, 2 点を結ぶ line 上の点なので, ある $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V_2^m$ が存在して, $R = \alpha A + \beta B$ ($\alpha, \beta \in k^\times$) とかける. 各成分をみると,

$$r_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$$

となっている. R の 3×3 の小行列式を見ると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r_{i_1 j_1} & r_{i_1 j_2} & r_{i_1 j_3} \\ r_{i_2 j_1} & r_{i_2 j_2} & r_{i_2 j_3} \\ r_{i_3 j_1} & r_{i_3 j_2} & r_{i_3 j_3} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha a_{i_1 j_1} + \beta b_{i_1 j_1} & \alpha a_{i_1 j_2} + \beta b_{i_1 j_2} & \alpha a_{i_1 j_3} + \beta b_{i_1 j_3} \\ \alpha a_{i_2 j_1} + \beta b_{i_2 j_1} & \alpha a_{i_2 j_2} + \beta b_{i_2 j_2} & \alpha a_{i_2 j_3} + \beta b_{i_2 j_3} \\ \alpha a_{i_3 j_1} + \beta b_{i_3 j_1} & \alpha a_{i_3 j_2} + \beta b_{i_3 j_2} & \alpha a_{i_3 j_3} + \beta b_{i_3 j_3} \end{vmatrix} \\ &= \alpha^3 \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix} + \beta^3 \begin{vmatrix} b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} & b_{i_3 j_3} \end{vmatrix} \\ &\quad + \alpha^2 \beta \left(\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & b_{i_3 j_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \alpha \beta^2 \left(\begin{vmatrix} b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & b_{i_3 j_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} & b_{i_3 j_3} \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

分解したすべての行列式には少なくとも 2 つの A, B の列ベクトルを含むことに注意する. 一方 $A, B \in V_2^m = V(I_2(\Omega))$ であったので, A, B の 2×2 小行列式は 0 である. よって R の 3×3 の小行列式は 0. すなわち, $R \in V(I_3(\Omega))$. $\square$

(ii) **Claim** [$\text{char}(k) \neq 0$ の時, $\text{Sec}(V_2^m)^\circ \supseteq V(I_3(\Omega))$.]

proof. 任意の $R = (r_{ij}) \in V(I_3(\Omega))$ に対して, R の rank は 1 または 2 であり, R は対称行列なので直行列を用いた対角化を考える.

(a) $\text{rank}(R)=1$ の時, 明らかに, $R \in V(I_2(\Omega)) = V_2^m \subset \text{Sec}(V_2^m)^\circ$.

(b) $\text{rank}(R)=2$ の時, ある可逆な直行列 $P \in GL_k(m+1)$ が存在して,

$$PR^tP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \in k^\times)$$

とかける. よって,

$$A + B := P^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP^{-1} + P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP^{-1} = R$$

とおけば, A, B は rank 1 の対称行列なので $A, B \in V(I_2(\Omega)) = V_2^m$ となり, $R \in \text{Sec}(V_2^m)^\circ$. $\square$

Remark 3.4. 上の証明より, $\text{char}(k) \neq 2$ であれば特に

$$\text{Sec}(V_2^m)^\circ = V(I_3(\Omega)).$$

またより一般に, $\text{char}(k) \neq 2$ に対して,

$$\text{Sec}^n(V_2^m)^\circ = V(I_{n+2}(\Omega)) \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ. ($\subseteq$) については, Lemma 4.2, 逆も Proposition 3.3 の証明を拡張するだけである.

Remark 3.5.

R. Gattazzo(1984) [2, p. 225] には, 以下のような注意が書いてある.

NOTE 2 もし標数が 2 の時, (ii) は成り立たない. $m = 2$ でその反例があり,

$$R := (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V(I_3(\Omega)) \setminus \text{Sec}(V_2^2)$$

となっている.

しかし, 実際にはこれは誤りであり, R は tangent line に載り, $R \in \text{Sec}(V_2^2)$ である.

Proposition 3.6. $R = (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5$ に対して,

- (i) $\text{char}(k) = 2$ の時, $R \notin \text{Sec}(V_2^2, V_2^2)^\circ$.
- (ii) $\text{char}(k) \neq 2$ の時, $R \in \text{Sec}(V_2^2, V_2^2)^\circ$.
- (iii) $\text{char}(k) = 2$ の時, $R \in \mathbb{T}_{(1:0:0:0:0:0)}V_2^2$ (V_2^2 の $(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ における tangent space).

Proof. (i) 背理法で示す. もし, ある $P := (x_0 : x_1 : x_2)$, $Q := (y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^2$ が存在して $R \in$

$\langle \nu_2(P), \nu_2(Q) \rangle$ とすると, $\alpha, \beta \in k^\times$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 & \alpha x_0 x_1 + \beta y_0 y_1 & \alpha x_0 x_2 + \beta y_0 y_2 \\ \alpha x_0 x_1 + \beta y_0 y_1 & \alpha x_1^2 + \beta y_1^2 & \alpha x_1 x_2 + \beta y_1 y_2 \\ \alpha x_0 x_2 + \beta y_0 y_2 & \alpha x_1 x_2 + \beta y_1 y_2 & \alpha x_2^2 + \beta y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, $\mathbb{P}^5$ の第 1 成分から $0 = \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 = \sqrt{\alpha}x_0 + \sqrt{\beta}y_0$ ($\text{char}(k) = 2$), 第 4 成分から $0 = \alpha x_1^2 + \beta y_1^2 = \sqrt{\alpha}x_1 + \sqrt{\beta}y_1$ なので, $x_0 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}y_0$, $x_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}y_1$ となる. しかし, 第 2 成分より $1 = \alpha x_0 x_1 + \beta y_0 y_1 = \alpha x_0 x_1 + \alpha x_0 x_1 = 2\alpha x_0 x_1 = 0$ となり, 矛盾する.

(ii) $\text{char}(k) \neq 2$ の時は, 例えば

$$P := (1 : 1 : 0), \quad Q := (i : -i : 0) \in \mathbb{P}^2$$

とおけば, $\nu_2(P), \nu_2(Q)$ に対応する行列の和は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^5.$$

よって,

$$R \in \langle \nu_2(P), \nu_2(Q) \rangle$$

(iii) $\nu : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5; (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0^2 : x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2)$ の x_0 におけるアフィン化を考え, その微分を考えると,

$$d\nu(X) := \begin{pmatrix} \nu(X) \\ \frac{\partial \nu(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \nu(X)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\approx$ の部分は, 二行目, 三行目の $-x_1, -x_2$ 倍を一行目に足す, 行変形である. また標数 2 であることも使っていることに注意しておく.

ここで, $T := (0 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2, P := (1, 0, 0) \in \{x_0\} \times \mathbb{A}^2$ とおくと,

$$R = (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) = T \cdot d\nu(P) \in \mathbb{P}^5$$

となるので, $\nu_2(P) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ より,

$$R \in \mathbb{T}_{(1:0:0:0:0:0)} V_2^2.$$

□

Remark 3.7. Proposition 3.6 より, $\text{char}(k) = 2$ ならば, $\text{Sec}(V_2^2) \neq \text{Sec}(V_2^2)^\circ$ である. より一般に,

$$\text{char}(k) = 2, \quad \text{Sec}(V_2^m) \neq \text{Sec}(V_2^m)^\circ \quad (m \geq 2)$$

である. これは,

$$R_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, $R_0 \notin \text{Sec}(V_2^m) \setminus \text{Sec}(V_2^m)^\circ$ となる. $R_0 \notin \text{Sec}(V_2^m)^\circ$ は Proposition 3.6 と同様である. $R_0 \in \text{Sec}(V_2^m)$ は後述の Lemma 4.3 参照.

3.3 Key lemma

次の補題は, A. Micali, O. E. Villamayor [8] の特別な場合である.

Lemma 3.8. R : 単位的可換環, $X = (x_{ij})_{\{0 \leq i, j \leq m\}} : (m+1) \times (m+1)$ 対称行列 で成分が R のものとする. このとき,

(a) $x_{00} \in R^\times$ の時, ある A : 可逆行列 が存在して,

(i)

$${}^tAXA := \begin{pmatrix} x_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ここで, $Y = (y_{ij}) : m \times m$ 対称行列で成分は以下で与えられる.

$$y_{ij} = x_{ij} - x_{i0}x_{0j}x_{00}^{-1} \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

(ii)

$$I_t(Y) \subseteq I_{t+1}(X) \quad (1 \leq t \leq m).$$

[8] には, 等号成立も主張されている.

(b) $x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10} \in R^\times$ の時, ある B : 可逆行列 が存在して,

(i)

$${}^tBXB := \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{10} & x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ここで, $Z = (z_{ij}) : (m-1) \times (m-1)$ 対称行列で成分は以下で与えられる.

$$z_{ij} = x_{ij} - x_{0j}\beta_{0i} - x_{1j}\beta_{1i} \quad (2 \leq i, j \leq m).$$

但し,

$$\beta_{0i} := \frac{x_{11}x_{i0} - x_{01}x_{i1}}{x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10}}, \quad \beta_{1i} := \frac{x_{00}x_{i1} - x_{10}x_{i0}}{x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10}} \quad (2 \leq i \leq m).$$

(ii)

$$I_t(Z) \subseteq I_{t+2}(X) \quad (1 \leq t \leq m-1).$$

[8] には, 等号成立も主張されている.

(a)-(i)

proof.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -x_{01}x_{00}^{-1} & \cdots & -x_{0m}x_{00}^{-1} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} {}^tAXA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_{01}x_{00}^{-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -x_{0m}x_{00}^{-1} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0m} \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{m0} & x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} A \\ &= \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0m} \\ 0 & x_{11} - x_{10}x_{01}x_{00}^{-1} & \cdots & x_{1m} - x_{10}x_{0m}x_{00}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{m1} - x_{m0}x_{01}x_{00}^{-1} & \cdots & x_{mm} - x_{m0}x_{0m}x_{00}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x_{01}x_{00}^{-1} & \cdots & -x_{0m}x_{00}^{-1} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{11} - x_{10}x_{01}x_{00}^{-1} & \cdots & x_{1m} - x_{10}x_{0m}x_{00}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{m1} - x_{m0}x_{01}x_{00}^{-1} & \cdots & x_{mm} - x_{m0}x_{0m}x_{00}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, (i) は良い. □

(a)-(ii) **Claim** [$I_t(Y) \subseteq I_{t+1}(X)$ ($1 \leq t \leq m$).]

proof. Y の $t \times t$ 次小行列式は, ($0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$, $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m$) に対して以下のようになり, 線形和で分解していく. 但しボールド体は対応する列ベクトルを表す, つまり $\mathbf{x}_{ij} = {}^t(x_{i_1j}, x_{i_2j}, \dots, x_{i_tj})$ である.

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}_{i_s j_s} |_{\{1 \leq s \leq t\}} &= \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} - \mathbf{x}_{i_0}x_{0j_1}x_{00}^{-1} & \mathbf{x}_{i_{j_2}} - \mathbf{x}_{i_0}x_{0j_2}x_{00}^{-1} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_t}} - \mathbf{x}_{i_0}x_{0j_t}x_{00}^{-1} \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \mathbf{x}_{i_{j_2}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_t}} \end{array} \right| + \sum_{l=1}^t \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \mathbf{x}_{i_{j_2}} & \cdots & (-x_{0j_l}x_{00}^{-1})\mathbf{x}_{i_0} \end{array} \right| \\ &\quad + \sum_{1 \leq l < k \leq t} \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \mathbf{x}_{i_{j_2}} & \cdots & (-x_{0j_l}x_{00}^{-1})\mathbf{x}_{i_0} \end{array} \right| + \cdots \\ &= \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \mathbf{x}_{i_{j_2}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_t}} \end{array} \right| + \sum_{l=1}^t (-x_{0j_l}x_{00}^{-1}) \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_{l-1}}} & \mathbf{x}_{i_0} \end{array} \right| \\ &\quad + \sum_{l=1}^t x_{0j_l}x_{00}^{-1}(-1)^l \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_0} & \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_{l-1}}} \end{array} \right| \end{aligned}$$

となる. 2つ目の等号では, 3つ目以降の項では同じ列ベクトルを二つ以上必ず持つので 0 となることを使い, 3つ目の等号では, l 行目を 1 行目に移す置換を行っていることに注意する. 次に X の $(t+1) \times (t+1)$ とし て以下をとり, 1 行目で余因子展開すれば,

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc} x_{00} & x_{0j_1} & \cdots & x_{0j_t} \\ \mathbf{x}_{i_0} & \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_t}} \end{array} \right| &= (-1)^{1+1}x_{00} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \mathbf{x}_{i_{j_2}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_t}} \end{array} \right| \\ &\quad + \sum_{l=1}^t (-1)^{1+(l+1)}x_{0j_l} \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_{i_0} & \mathbf{x}_{i_{j_1}} & \cdots & \mathbf{x}_{i_{j_{l-1}}} \end{array} \right| \end{aligned}$$

となり, この二つの小行列式は $x_{00} \in R^\times$ 倍を除いて一致している. よって,

$$I_t(Y) \subseteq I_{t+1}(X) \quad (1 \leq t \leq m).$$

□

(b)-(i)

proof.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_{02} & \cdots & -\beta_{0m} \\ 0 & 1 & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1m} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

但し,

$$d := x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10}, \quad \beta_{0i} := (x_{11}x_{0i} - x_{01}x_{1i})d^{-1}, \quad \beta_{1i} := (x_{00}x_{1i} - x_{10}x_{0i})d^{-1}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} {}^tBXB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_{02} & -\beta_{12} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\beta_{0m} & -\beta_{1m} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0m} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{01} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0m} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 0 & 0 & x_{22} - x_{02}\beta_{02} - x_{12}\beta_{12} & \cdots & x_{2m} - x_{0m}\beta_{02} - x_{1m}\beta_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x_{m2} - x_{02}\beta_{0m} - x_{12}\beta_{1m} & \cdots & x_{mm} - x_{0m}\beta_{0m} - x_{1m}\beta_{1m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_{02} & \cdots & -\beta_{0m} \\ 0 & 1 & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1m} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{10} & x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} - x_{02}\beta_{02} - x_{12}\beta_{12} & \cdots & x_{2m} - x_{0m}\beta_{02} - x_{1m}\beta_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x_{m2} - x_{02}\beta_{0m} - x_{12}\beta_{1m} & \cdots & x_{mm} - x_{0m}\beta_{0m} - x_{1m}\beta_{1m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, (i) は良い. □

(b)-(ii) **Claim** [$I_t(Z) \subseteq I_{t+2}(X) \quad (1 \leq t \leq m-1).$]

proof. Z の $t \times t$ 次小行列式 $|z_{i_k j_l}|$ は, $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$, $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m$ に対して以下のようになり, 線形和で分解していくことを考える. 但しボールド体は対応する列ベクトルを表す, つまり $\mathbf{x}_{ij} = {}^t(x_{i_1 j}, x_{i_2 j}, \dots, x_{i_t j})$ である.

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}_{ij_s}|_{\{1 \leq s \leq t\}} &= |\mathbf{x}_{ij_s} - x_{0j_s}\boldsymbol{\beta}_{0i} - x_{1j_s}\boldsymbol{\beta}_{1i}|_{\{1 \leq s \leq t\}} \\ &= |\mathbf{x}_{ij_s} - x_{0j_s}(x_{11}\mathbf{x}_{i0} - x_{01}\mathbf{x}_{i1})d^{-1} - x_{1j_s}(x_{00}\mathbf{x}_{i1} - x_{10}\mathbf{x}_{i0})d^{-1}|_{\{1 \leq s \leq t\}} \\ &= |\mathbf{x}_{ij_s} + (x_{10}x_{1j_s} - x_{11}x_{0j_s})\mathbf{x}_{i0}d^{-1} + (x_{01}x_{0j_s} - x_{00}x_{1j_s})\mathbf{x}_{i1}d^{-1}|_{\{1 \leq s \leq t\}} \\ &= |\mathbf{x}_{ij_s}|_{\{1 \leq s \leq t\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^t (x_{10}x_{1j_k} - x_{11}x_{0j_k})d^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{ij_1} & \cdots & \mathbf{x}_{i0} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_t} \end{vmatrix} \\
& + \sum_{l=1}^t (x_{01}x_{0j_l} - x_{00}x_{1j_l})d^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{ij_1} & \cdots & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_t} \end{vmatrix} \\
& + \sum_{1 \leq k < l \leq t} (x_{10}x_{1j_k} - x_{11}x_{0j_k})(x_{01}x_{0j_l} - x_{00}x_{1j_l})d^{-2} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{ij_1} & \cdots & \mathbf{x}_{i0} & \cdots & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_t} \end{vmatrix} \\
& + \sum_{1 \leq l < k \leq t} (x_{10}x_{1j_k} - x_{11}x_{0j_k})(x_{01}x_{0j_l} - x_{00}x_{1j_l})d^{-2} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{ij_1} & \cdots & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{i0} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_t} \end{vmatrix} \\
& = |\mathbf{x}_{ij_l}|_{\{1 \leq l \leq t\}} \\
& + \sum_{k=1}^t (x_{10}x_{1j_k} - x_{11}x_{0j_k})d^{-1}(-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k\}} \\
& + \sum_{l=1}^t (x_{01}x_{0j_l} - x_{00}x_{1j_l})d^{-1}(-1)^{l-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq l\}} \\
& + \sum_{1 \leq k < l \leq t} (x_{00}x_{11}x_{0j_k}x_{1j_l} + x_{10}x_{01}x_{0j_l}x_{1j_k} - x_{00}x_{10}x_{0j_l}x_{1j_k} - x_{11}x_{01}x_{0j_k}x_{0j_l})d^{-2}(-1)^{(k-1)+(l-2)} \\
& \quad \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}} \\
& + \sum_{1 \leq l < k \leq t} (x_{00}x_{11}x_{0j_l}x_{1j_k} + x_{10}x_{01}x_{0j_k}x_{1j_l} - x_{00}x_{10}x_{0j_k}x_{1j_l} - x_{11}x_{01}x_{0j_l}x_{0j_k})d^{-2}(-1)^{(k-1)+(l-1)} \\
& \quad \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}} \\
& = |\mathbf{x}_{ij_s}|_{\{1 \leq s \leq t\}} \\
& + \sum_{k=1}^t (x_{10}x_{1j_k} - x_{11}x_{0j_k})d^{-1}(-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k\}} \\
& + \sum_{l=1}^t (x_{01}x_{0j_l} - x_{00}x_{1j_l})d^{-1}(-1)^{l-1} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq l\}} \\
& + \sum_{1 \leq k < l \leq t} (x_{0j_k}x_{1j_l})d^{-1}(-1)^{(k+l-3)} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}} \\
& + \sum_{1 \leq l < k \leq t} (x_{0j_k}x_{1j_l})d^{-1}(-1)^{(k+l-2)} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_s} & \cdots \end{vmatrix}_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}}.
\end{aligned}$$

4 つ目の等号は, $\mathbf{x}_{i0}$, $\mathbf{x}_{i1}$, $\mathbf{x}_{ij_s}$ に注目して, 線形和で行列式を分解している. $\mathbf{x}_{i0}$, $\mathbf{x}_{i1}$ それぞれを 2 つ以上含む場合は, 従属して行列式が 0 になっていることに注意する. 5 つ目の等号は, k 行目を 1 行目へ l 行目を 2 行目へ移す置換を行っている. 6 つ目の等号は, 後ろの 2 項で $x_{00}x_{10}x_{0j_k}x_{1j_l}$ と $x_{11}x_{01}x_{0j_l}x_{0j_k}$ がそれぞれで打ち消し合い, $x_{00}x_{11}x_{0j_l}x_{1j_k}$ と $x_{10}x_{01}x_{0j_k}x_{1j_l}$ を合わせて, d 倍の $x_{0j_k}x_{1j_l}$ が出てくことに注意する. 一方 X の $(t+2) \times (t+2)$ 行列式として, 以下を取り 1, 2 行目で余因子展開すると,

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{0j_1} & \cdots & x_{0j_t} \\ x_{10} & x_{11} & x_{1j_1} & \cdots & x_{1j_t} \\ \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{ij_1} & \cdots & \mathbf{x}_{ij_t} \end{vmatrix} \\
& = (-1)^{1+1}x_{00}(-1)^{1+1}x_{11}|\mathbf{x}_{ij_s}|_{\{1 \leq s \leq t\}} + (-1)^{1+2}x_{01}(-1)^{1+1}x_{10}|\mathbf{x}_{ij_s}|_{\{1 \leq s \leq t\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^t \{(-1)^{1+2} x_{01} (-1)^{1+(k+1)} x_{1j_k} + (-1)^{1+(k+2)} x_{0j_k} (-1)^{1+2} x_{11}\} \mid \mathbf{x}_{i0} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k\}} \\
& + \sum_{l=1}^t \{(-1)^{1+(l+2)} x_{0j_l} (-1)^{1+1} x_{10} + (-1)^{1+1} x_{00} (-1)^{1+(l+1)} x_{1j_l}\} \mid \mathbf{x}_{i1} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq l\}} \\
& + \sum_{1 \leq k < l \leq t} (-1)^{1+(l+2)} x_{0j_k} (-1)^{1+(k+1)} x_{1j_l} \mid \mathbf{x}_{i0} \mathbf{x}_{i1} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}} \\
& + \sum_{1 \leq l < k \leq t} (-1)^{1+(l+2)} x_{0j_k} (-1)^{1+(k+2)} x_{1j_l} \mid \mathbf{x}_{i0} \mathbf{x}_{i1} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}} \\
& = d \mid \mathbf{x}_{ij_s} \mid_{\{1 \leq s \leq t\}} \\
& + \sum_{k=1}^t (x_{01} x_{1j_k} - x_{0j_k} x_{11}) (-1)^{l+5} \mid \mathbf{x}_{i0} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k\}} \\
& + \sum_{l=1}^t (x_{0j_l} x_{10} - x_{00} x_{1j_l}) (-1)^{l+3} \mid \mathbf{x}_{i1} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq l\}} \\
& + \sum_{1 \leq k < l \leq t} (-1)^{k+l+5} x_{0j_k} x_{1j_l} \mid \mathbf{x}_{i0} \mathbf{x}_{i1} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}} \\
& + \sum_{1 \leq l < k \leq t} (-1)^{k+l+6} x_{0j_k} x_{1j_l} \mid \mathbf{x}_{i0} \mathbf{x}_{i1} \cdots \mathbf{x}_{ij_s} \cdots \mid_{\{1 \leq s \leq t, s \neq k, l\}}
\end{aligned}$$

となる。この二つは、 $d \in R^\times$ 倍で一致している。よって、

$$I_t(Z) \subseteq I_{t+2}(X) \quad (1 \leq t \leq m-1).$$

□

4 Main theorem

Main Theorem 4.1. $\text{char}(k) \geq 0$, V_2^m を Veronese variety とする。この時、 $n \geq 0$ に対して、

$$\text{Sec}^n(V_2^m) = V(I_{n+2}(\Omega)).$$

が成り立つ。

Main Theorem は、以下の Lemma 4.2, 4.3, 4.5 から従う。

Lemma 4.2.

$$\text{Sec}^n(V_2^m) \subseteq V(I_{n+2}(\Omega)) \quad (n \geq 0)$$

Proof. **Claim** $[\text{Sec}^n(V_2^m)^\circ \subseteq V(I_{n+2}(\Omega)) \quad (n \geq 1).]$

これが示されれば、両辺の閉包をとることで Lemma が従う、 $n = 0$ は Proposition 3.1. よって Claim を示す。任意の $R = (r_{ij}) \in \text{Sec}^n(V_2^m)^\circ \subset \mathbb{P}^N$ に対して、 $n+1$ 点で張られる線型部分空間上の点なので、ある $A_1 = (a_{ij}^1), \dots, A_{n+1} = (a_{ij}^{n+1}) \in V_2^m$ が存在して、 $R = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_l A_l$ ($\alpha_l \in k^\times$) とかける。各成分をみると、

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_l a_{ij}^l$$

となっている. R の $(n+2) \times (n+2)$ の小行列式を見ると, (但しボールド体の文字は, 対応する $(n+2)$ 列ベクトルを表す.)

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{r}_{j_1} & \mathbf{r}_{j_2} & \cdots & \mathbf{r}_{j_{n+2}} \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cccc} \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_l \mathbf{a}_{j_1}^l & \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_l \mathbf{a}_{j_2}^l & \cdots & \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_l \mathbf{a}_{j_{n+2}}^l \end{array} \right| \\ &= \sum_{1 \leq l_1, l_2, \dots, l_{n+2} \leq n+1} \alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_{n+2}} \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_{j_1}^{l_1} & \mathbf{a}_{j_2}^{l_2} & \cdots & \mathbf{a}_{j_{n+2}}^{l_{n+2}} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

ここで $\{1 \leq l_1, l_2, \dots, l_{n+2} \leq n+1\}$ は少なくとも二つは同じ元を含むので, $|\mathbf{a}_{j_1}^{l_1} \mathbf{a}_{j_2}^{l_2} \cdots \mathbf{a}_{j_{n+2}}^{l_{n+2}}|$ は, 少なくとも二つ同じ A_l の列ベクトルを含む. 一方, $A_l \in V_2^m = V(I_2(\Omega))$ であったので, A_l の 2×2 小行列式は 0 である. よって,

$$|\mathbf{r}_{j_1} \mathbf{r}_{j_2} \cdots \mathbf{r}_{j_{n+2}}| = 0.$$

すなわち, $R \in V(I_{n+2}(\Omega))$. □

よって以下は,

$$V(I_{n+2}(\Omega)) \subseteq \text{Sec}^n(V_2^m) \quad (n \geq 1).$$

だけ示す.

4.1 Secant variety

Lemma 4.3. $R = (r_{ij}) \in V(I_3(\Omega)) \subset \mathbb{P}^N$ に対して,

(i) ある i が存在して $r_{ii} \neq 0$ の時,

$$\exists P \in V_2^m, \exists Q \in V_2^m \text{ s.t. } R \in \langle P, Q \rangle.$$

(ii) 任意の i に対して $r_{ii} = 0$ の時,

$$\exists P \in \mathbb{P}^m \text{ s.t. } R \in \mathbb{T}_P V_2^m \subseteq \text{Tan}(V_2^m) = \text{Sec}(V_2^m).$$

特に,

$$V(I_3(\Omega)) \subseteq \text{Sec}(V_2^m).$$

Lemma 3.8 (i) から分かる. Lemma 3.8 を使った証明は後述の Lemma 4.5 参照. この部分に関しては本質的に同じ証明である.

(i) ある i が存在して $r_{ii} \neq 0$ の時,

proof. 対称性より, $r_{00} \neq 0$ と仮定して良い.

$$P := (r_{i0}r_{0j}) \in \mathbb{P}^N, \quad Q = (r_{00}r_{ij} - r_{i0}r_{0j}) \in \mathbb{P}^N \quad (0 \leq i, j \leq m).$$

とおくと, 明らかに $R = P + Q \in \mathbb{P}^N$. である.

Claim $[P \in V_2^m, Q \in V_2^m.]$

$P \in V_2^m$ については, 各 2 から $m+1$ 行目は, $r_{00} \in k^\times$ より, 1 行目に従属していることから, $P \in V(I_2(\Omega)) = V_2^m$ である. $Q \in V_2^m$ については, Q の任意の 2×2 小行列式は, $0 \leq i < k \leq m, 0 \leq j < l \leq m$ に対して,

$$\begin{vmatrix} r_{00}r_{ij} - r_{i0}r_{0j} & r_{00}r_{il} - r_{i0}r_{0l} \\ r_{00}r_{kj} - r_{k0}r_{0j} & r_{00}r_{kl} - r_{k0}r_{0l} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} r_{00}r_{ij} & r_{00}r_{il} \\ r_{00}r_{kj} & r_{00}r_{kl} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_{00}r_{ij} & -r_{i0}r_{0l} \\ r_{00}r_{kj} & -r_{k0}r_{0l} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -r_{i0}r_{0j} & r_{00}r_{il} \\ -r_{k0}r_{0j} & r_{00}r_{kl} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -r_{i0}r_{0j} & -r_{i0}r_{0l} \\ -r_{k0}r_{0j} & -r_{k0}r_{0l} \end{vmatrix} \\
&= (r_{00})^2 \begin{vmatrix} r_{ij} & r_{il} \\ r_{kj} & r_{kl} \end{vmatrix} + (-1)r_{00}(-r_{0l}) \begin{vmatrix} r_{i0} & r_{ij} \\ r_{k0} & r_{kj} \end{vmatrix} + r_{00}(-r_{0j}) \begin{vmatrix} r_{i0} & r_{il} \\ r_{k0} & r_{kl} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

とかける. 一方, $R \in V(I_3(\Omega))$ より,

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} r_{00} & r_{0j} & r_{0l} \\ r_{i0} & r_{ij} & r_{il} \\ r_{k0} & r_{kj} & r_{kl} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}r_{00} \begin{vmatrix} r_{ij} & r_{il} \\ r_{kj} & r_{kl} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}r_{0j} \begin{vmatrix} r_{i0} & r_{il} \\ r_{k0} & r_{kl} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}r_{0l} \begin{vmatrix} r_{i0} & r_{ij} \\ r_{k0} & r_{kj} \end{vmatrix} \\
&= r_{00}^{-1}|Q|_2.
\end{aligned}$$

よって, $Q \in V(I_2(\Omega)) = V_2^m$. □

(ii) 任意の i 対して $r_{ii} = 0$ の時,

proof. $R \in \mathbb{P}^N$ より, ある i, j が存在して $r_{ij} \neq 0$. 対称性より, $r_{01} \neq 0$ としても一般性を失わない. なので $r_{01} = 1$ とする.

$$T_0 := (r_{00} : r_{01} : \dots : r_{0m-1} : r_{0m}) \in \mathbb{P}^m, \quad Q' := (1, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1m}) \in \mathbb{A}^m.$$

とおく. このとき,

Claim [$R = T \cdot d\nu(Q')$.]

$\nu : \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N; (x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_m) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : \dots : x_m^2)$ の x_0 におけるアフィン化を考え, その微分 $d\nu(X)$ を考えると,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \nu(X) \\ \nu_{x_1}(X) \\ \vdots \\ \nu_{x_i}(X) \\ \vdots \\ \nu_{x_j}(X) \\ \vdots \\ \nu_{x_m}(X) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_m & \left| \begin{array}{cc} x_1^2 & \cdots \\ 2x_1 & \cdots \end{array} \right| & \begin{array}{cc} x_i^2 & \cdots \\ 2x_i & \cdots \end{array} & \begin{array}{cc} x_ix_j & \cdots \\ x_j & \cdots \end{array} & \begin{array}{cc} x_m^2 & \cdots \\ 2x_m & \cdots \end{array} \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \left| \begin{array}{cc} -x_1^2 & \cdots \\ 2x_1 & \cdots \end{array} \right| & \begin{array}{cc} -x_i^2 & \cdots \\ 2x_i & \cdots \end{array} & \begin{array}{cc} -x_ix_j & \cdots \\ x_j & \cdots \end{array} & \begin{array}{cc} -x_m^2 & \cdots \\ 2x_m & \cdots \end{array} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. $\approx$ の部分は, $i+1$ 行目の $-x_i$ 倍を 1 行目に足す行変形である. $T := (t_0 : t_1 : t_2 : \dots : t_m), X :=$

$(x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_m)$ に対して,

$$(Z_{00} : Z_{01} : Z_{02} : \dots : Z_{m-1m} : Z_{mm}) := T \cdot d\nu(X) \in \mathbb{P}^N$$

とおくと,

$$\begin{cases} Z_{0i} = t_i & (0 \leq i \leq m), \\ Z_{ij} = -t_0 x_i x_j + t_i x_j + t_j x_i & (0 < i \leq j \leq m). \end{cases}$$

これに先ほどの,

$$T_0 := (r_{00} : r_{01} : \dots : r_{0m-1} : r_{0m}) \in \mathbb{P}^m, \quad Q' := (1, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1m}) \in \mathbb{A}^m.$$

を代入すると,

$$\begin{cases} Z_{0i} = r_{0i} & (0 \leq i \leq m), \\ Z_{ij} = r_{0i} r_{1j} + r_{0j} r_{1i} & (0 < i \leq j \leq m). \end{cases}$$

ここで, $R \in V(I_3(\Omega))$ より, $r_{ii} = 0$ に注意すれば,

$$0 = \begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{0j} \\ r_{10} & r_{11} & r_{1j} \\ r_{i0} & r_{i1} & r_{ij} \end{vmatrix} = r_{01} r_{i1} r_{0j} + r_{i0} r_{1j} r_{10} - r_{01} r_{10} r_{ij}$$

なので, $r_{01} = r_{10} = 1$ より, $r_{ij} = r_{i1} r_{0j} + r_{1j} r_{0i}$ なので,

$$Z_{ij} = r_{i0} r_{1j} + r_{0j} r_{i1} = r_{ij} \quad (0 < i \leq j \leq m)$$

よって,

$$R = T \cdot d\nu(Q') \in \mathbb{P}^N$$

となる.

$$\exists P \in \mathbb{P}^m \text{ s.t. } R \in \mathbb{T}_P V_2^m.$$

□

Remark 4.4. $\text{char}(k) = 2$ の時, 任意の i に対して $r_{ii} = 0$ となっている場合の R を V_2^m の二点の "極限" の形で表すこともできる. ここで言っている "極限" とは, 特殊化 (specialization) のこと. 定義は [5] 参照.

証明の時と同様に $r_{01} = 1$ と仮定する.

$$\begin{aligned} Q &:= (r_{01} : r_{11} : r_{12} : \dots : r_{1i} : \dots : r_{1m}), \\ Q(t) &:= (r_{01} + r_{00}t : r_{11} + r_{01}t : r_{12} + r_{02}t : \dots : r_{1i} + r_{0i}t : \dots : r_{1m} + r_{0m}t) \end{aligned}$$

とおくと, $Q(t) \rightsquigarrow Q(\text{特殊化})$ である. まず $R \in V(I_3(\Omega))$ より,

$$0 = \begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{0j} \\ r_{10} & r_{11} & r_{1j} \\ r_{i0} & r_{i1} & r_{ij} \end{vmatrix} = r_{01} r_{i1} r_{0j} + r_{i0} r_{1j} r_{10} - r_{01} r_{10} r_{ij} = r_{i1} r_{0j} + r_{i0} r_{1j} - r_{ij}.$$

よって,

$$r_{ij} = r_{i1} r_{0j} + r_{i0} r_{1j}.$$

一方, $\nu_2(Q)$, $\nu_2(Q(t))$ のに対応する行列の和は,

$$\begin{aligned} (r_{1i}r_{1j}) + (r_{1i} + r_{0i}t)(r_{1j} + r_{0j}t) &= 2r_{1i}r_{1j} + (r_{1i}r_{0j} + r_{0i}r_{1j} + r_{0i}r_{0j}t)t \\ &= r_{1i}r_{0j} + r_{0i}r_{1j} + r_{0i}r_{0j}t \\ &\leadsto r_{1i}r_{0j} + r_{0i}r_{1j} \\ &= R \in \mathbb{P}^N. \end{aligned}$$

となり, R は $Q(t) \leadsto Q$ とした時の”極限”となっている.

4.2 Higher secant variety

Lemma 4.5. $R = (r_{ij}) \in V(I_{n+2}(\Omega)) \subset \mathbb{P}^N$, $n \geq 2$ に対して,

(i) ある i が存在して $r_{ii} \neq 0$ の時,

$$\exists P \in V_2^m, \exists Q \in \text{Sec}^{n-1}(V_2^m) \text{ s.t. } R \in \langle P, Q \rangle.$$

(ii) 任意の i に対して $r_{ii} = 0$ の時,

$$\exists P \in \text{Tan}(V_2^m), \exists Q \in \text{Sec}^{n-2}(V_2^m) \text{ s.t. } R \in \langle P, Q \rangle.$$

特に,

$$V(I_{n+2}(\Omega)) \subseteq \text{Sec}^n(V_2^m) \quad (n \geq 2).$$

proof (i), (ii) とともに n に関する数学的帰納法で示す. $\text{Sec}(V_2^m) = V(I_3(\Omega))$ は Lemma 4.3 で示されており, また $\text{Sec}^n(V_2^m) \subseteq V(I_{n+2}(\Omega))$ の包含関係は Lemma 4.2 で示してあるので, $n \geq 1$ で $\text{Sec}^k(V_2^m) = V(I_{k+2}(\Omega))$ ($0 \leq k < n$) が成り立つと仮定して (i), (ii) を示せば良い.

(i) **Claim**[ある i が存在して $r_{ii} \neq 0$ の時, $\exists P \in V_2^m, \exists Q \in \text{Sec}^{n-1}(V_2^m)$ s.t. $R \in \langle P, Q \rangle$.]

proof. 対称性より, $r_{00} \neq 0$ としても一般性を失わない. R は対称行列であり, 今 $r_{00} \in k^\times$ なので Lemma 3.8 の (a) を $X = R$ として適用すると,

$${}^tARA := \begin{pmatrix} r_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

但し,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -r_{01}r_{00}^{-1} & \cdots & -r_{0n-1}r_{00}^{-1} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

$Y = (y_{ij}) : (m-1) \times (m-1)$ 対称行列で,

$$y_{ij} = r_{ij} - r_{i0}r_{0j}r_{00}^{-1} \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

と書ける. そこで,

$$P := {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} r_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = (r_{i0} r_{0j} r_{00}^{-1})_{\{0 \leq i, j \leq m\}} \in \mathbb{P}^N,$$

$$Q := {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (r_{ij} - r_{i0} r_{0j} r_{00}^{-1})_{\{0 \leq i, j \leq m\}} \in \mathbb{P}^N.$$

とおく. 明らかに, P, Q は対称行列であり, さらに行列の和と見て $R = r_{00}(P + Q)$ をみtas. また P は高々 rank 1 となるので, $P \in V(I_2(\Omega)) = V_2^m$. 一方, Lemma 3.8 の (a) の (ii) より,

$$I_t(Q) = I_t(Y) \subseteq I_{t+1}(R) \quad (1 \leq t \leq m).$$

となり, 今 $R \in V(I_{n+2}(\Omega))$ としていたので, $Q \in V(I_{n+1}(\Omega))$.

帰納法の仮定より, $V(I_{n+1}(\Omega)) = \text{Sec}^{n-1}(V_2^m)$. よって

$$\exists P \in V_2^m, \exists Q \in \text{Sec}^{n-1}(V_2^m) \text{ s.t. } R \in \langle P, Q \rangle.$$

□

(ii) **Claim**[任意の i に対して $r_{ii} = 0$ の時, $\exists P \in \text{Tan}(V_2^m), \exists Q \in \text{Sec}^{n-2}(V_2^m)$ s.t. $R \in \langle P, Q \rangle$.]

proof. $R \in \mathbb{P}^N$ より, ある i, j が存在して $r_{ij} \neq 0$. 対称性より, $r_{01} \neq 0$ としても一般性を失わない. R は対称行列であり, 今 $r_{00} r_{11} - r_{01} r_{10} = -r_{01}^2 \in k^\times$ なので Lemma 3.8 の (b) を $X = R$ として適用すれば,

$${}^t B R B := \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ r_{10} & r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

但し,

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_{02} & \cdots & -\beta_{0n-1} \\ 0 & 1 & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

$Z : (m-2) \times (m-2)$ 対称行列 で,

$$z_{ij} = r_{ij} - r_{0j} \beta_{0i} - r_{1j} \beta_{1i} \quad (2 \leq i, j \leq m),$$

$$\beta_{0i} := \frac{r_{11} r_{0i} - r_{01} r_{1i}}{r_{00} r_{11} - r_{01} r_{10}}, \quad \beta_{1i} := \frac{r_{00} r_{1i} - r_{10} r_{0i}}{r_{00} r_{11} - r_{01} r_{10}} \quad (2 \leq i \leq m)$$

で定義されるもの. 今, $\forall i, r_{ii} = 0$ より,

$$\beta_{0i} = \frac{r_{1i}}{r_{01}}, \quad \beta_{1i} = \frac{r_{0i}}{r_{01}},$$

なので,

$$z_{ij} = r_{ij} - \frac{r_{0j}r_{1i} + r_{1j}r_{0i}}{r_{01}},$$

である. ここで,

$$P := {}^tB^{-1} \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ r_{10} & r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} B^{-1},$$

$$Q := {}^tB^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

とおけば, 明らかに行列の和とみれば $R = P + Q$ であり, P は高々 rank 2 となるので, $P \in V(I_3(\Omega))$. よって Lemma 4.3 より, $V(I_3(\Omega)) = \text{Sec}(V_2^m)$ なので $P \in \text{Sec}(V_2^m) = \text{Tan}(V_2^m)$. 一方, Lemma 3.8 の (b) の (ii) より,

$$I_t(Q) = I_t(Z) \subseteq I_{t+2}(R) \quad (1 \leq t \leq m-1)$$

となり, 今 $R \in V(I_{n+2}(\Omega))$ としていたので, $Q \in V(I_n(\Omega))$. 帰納法の仮定より, $V(I_n(\Omega)) = \text{Sec}^{n-2}(V_2^m)$. よって,

$$\exists P \in \text{Tan}(V_2^m), \exists Q \in \text{Sec}^{n-1}(V_2^m) \text{ s.t. } R \in \langle P, Q \rangle.$$

□

proof of Main theorem. $n \geq 0$ に対して, Lemma 4.2 より,

$$\text{Sec}^n(V_2^m) \subseteq V(I_{n+2}(\Omega)).$$

Lemma 4.3, 4.5 より,

$$\text{Sec}^n(V_2^m) \supseteq V(I_{n+2}(\Omega)).$$

よって,

$$\text{Sec}^n(V_2^m) = V(I_{n+2}(\Omega)).$$

Q.E.D.

5 Application

Definition 5.1 (Rational normal curve). $\mathbb{P}^1$ からの d -uple embedding の像を **rational normal curve** といい, $V_d^1 := \nu_d(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$ と書く.

Definition 5.2 (Rank). $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を smooth projective variety とする. $P \in \mathbb{P}^N$ に対して,

$$\text{rank}_X(P) := \min\{n \mid P \in \text{Sec}^n(X)\}$$

を, P の X における **rank** という.

Definition 5.3 (Graded Betti number). $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を projective variety とし, R を $\mathbb{P}^N$ の斉次座標環, $I_X \subseteq R$ を X 定義イデアルとする. I_X を S の次数付き S -module とみて, minimal free resolution を取る.

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow I_X \longrightarrow 0 \quad (F_i : \text{free graded } S\text{-module}).$$

このとき, F_i は free だから,

$$F_i = \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{ij}(X)}$$

とかける. この $\beta_{ij}(X)$ を X の **graded betti number** という, minimal free resolution などの定義についての詳細は [1] 参照.

Proposition 5.4 (E. Prak (2007) [9]). $\text{char}(k) \geq 0$, $P \in \mathbb{P}^d \setminus \text{Sec}(V_d^1)$, $\pi_P : \mathbb{P}^d \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ (P からの一点射影) とする. $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^d \setminus \text{Sec}(V_d^1)$ に対して,

$$\text{rank}_{V_d^1}(P_1) = \text{rank}_{V_d^1}(P_2) \iff \beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_d^1)) = \beta_{ij}(\pi_{P_2}(V_d^1)).$$

この結果の V_d^1 を V_2^m にできないか, という自然な予想があるが, それは次の例で示すように少なくとも $\text{char}(k) = 2$ では成り立たないことが分かる. これは, Main Theorem 4.1 から higher secant variety が計算できていることから, rank が計算できることが利いている.

Example 5.5. $V_2^4 := \nu_2(\mathbb{P}^4) \subset \mathbb{P}^{14}$ を考える. Main Theorem 4.1 より

$$\text{Sec}^n(V_2^4) = V(I_{n+1}(\Omega)).$$

$$Z = (Z_0 : \cdots : Z_{14}) \in \mathbb{P}^{14},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ Z_2 & Z_6 & Z_9 & Z_{10} & Z_{11} \\ Z_3 & Z_7 & Z_{10} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_4 & Z_8 & Z_{11} & Z_{13} & Z_{14} \end{pmatrix}.$$

であることに注意すれば,

$$\begin{cases} P_1 := (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) & (Z_3, Z_6 \text{成分のみ } 1) \in \mathbb{P}^{14}, \\ P_2 := (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) & (Z_0, Z_5, Z_{10} \text{成分のみ } 1) \in \mathbb{P}^{14}. \end{cases}$$

とすると,

$$3 = \text{rank}_{V_2^4}(P_1) = \text{rank}_{V_2^4}(P_2)$$

を満たす。しかし,

(i) $\text{char}(k) = 2$ の時,

$$\beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^4)) \neq \beta_{ij}(\pi_{P_2}(V_2^4)).$$

(ii) $\text{char}(k) = 0, 3$ の時,

$$\beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^4)) = \beta_{ij}(\pi_{P_2}(V_2^4)).$$

となる。この結果は Singular^{*2}を用いて計算した結果である。計算に使ったプログラムの概要は、5.1 参照。計算結果は 5.2 参照。

Notation 5.6. Example 5.5 の書いたものの以外にも V_2^m をいくつかの点で射影した多様体の graded betti number に関して計算した。その結果を簡単に書く。計算を行ったのは、 V_2^2 で点の rank が 2 と、 V_2^3 で点の rank が 2, 3 と、 V_2^4 で点の rank が 2, 3, 4 である。 $V_2^m, m \geq 5$ は計算量が大きすぎて計算できなかった。

まず、 $\text{char}(k) = 0, 3, 5$ については、Proposition 5.4 を V_2^m で考えたときの結果を否定する例は一つも見つからない。すべての点 (同じ rank の時)、すべての標数で同じ graded betti number を与える結果しか出ていない。なので $\text{char}(k) \neq 2$ なら、Proposition 5.4 を V_2^m で考えたときの結果が成り立つのかもしれない、これが Problem 5.7 である。

$\text{char}(k) = 2$ については、 V_2^3, V_2^4 のそれぞれの rank の点は、 $\text{char}(k) = 0, 3, 5$ の graded betti number とは異なるようだった。 $\text{char}(k) = 2$ の中で、graded betti number が異なる点を見つけたのは、Example 5.5 で記した rank が 3 の場合だけである (他の rank でも存在する可能性が十分にある)。また rank 3 において、10 個程度の点のを計算したところ graded betti number は二つのタイプしか出てきていない (もちろん他にも存在する可能性は十分にある)。一応その結果も記しておく。

便宜上 Example 5.5 の P_1, P_2 をそれぞれ Type 1, 2 を呼ぶこととし、 $Z_t, \dots, Z_s$ が 1 で他の Z_u が 0 の点を、 $(s, \dots, t)$ のように書くことにする。この表記では $P_1 = (3, 6), P_2 = (0, 5, 10)$ となる。

Type 1;

$$(3, 6), (4, 7), (8, 10), (0, 7, 9).$$

Type 2;

$$(0, 5, 9, 12), (0, 5, 9, 14), (0, 9, 12, 14), (0, 5, 10, 13), (0, 5, 10).$$

となった。これらに規則性があるのかどうかは分からなかった。

Problem 5.7. $\text{char}(k) \neq 2, m \geq 2, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^N \setminus \text{Sec}(V_2^m)$ に対して,

$$\text{rank}_{V_2^m}(P_1) = \text{rank}_{V_2^m}(P_2) \iff \beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^m)) = \beta_{ij}(\pi_{P_2}(V_2^m)).$$

^{*2} SINGULAR is a Computer Algebra System for polynomial computations with special emphasis on the needs of commutative algebra, algebraic geometry, and singularity theory.
<http://www.singular.uni-kl.de/index.html>

5.1 Singular の計算プログラム

Example 5.5 のプログラム $\text{char}(k) = 2$, $\beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^4))$ のケースを書く. 以下プログラム文.

singular プログラム.txt

```

ring r=2, (t(0..4), z(0..14)), lp;
//
// 環の定義, 標数2, t, zは変数, lpは順序
// tはパラメーター $P^4$ , zは $P^4[14]$ の座標にそれぞれ対応している.
//
ideal I =
z(0) - t(0)*t(0),
z(1) - t(0)*t(1),
z(2) - t(0)*t(2),
//
// z(3)を消去している. これが射影に対応している.
//
z(4) - t(0)*t(4),
z(5) - t(1)*t(1),
z(6) - t(1)*t(2)-t(0)*t(3),
//
// z(6)をz(6)-z(3)に変換している.
//
z(7) - t(1)*t(3),
z(8) - t(1)*t(4),
z(9) - t(2)*t(2),
z(10) - t(2)*t(3),
z(11) - t(2)*t(4),
z(12) - t(3)*t(3),
z(13) - t(3)*t(4),
z(14) - t(4)*t(4);
//
// これが $\pi_{P_1}(V_2^4)$ のパラメーター付けされた定義イデアルである.
//
ideal J= eliminate(I, t(0)*t(1)*t(2)*t(3)*t(4));
//
// Iの消去イデアル.
// これが $\pi_{P_1}(V_2^4)$ の定義イデアル $I_{\pi_{P_1}(V_2^4)} \subset S$ である.
//
resolution ReJ = mres(J, 0);
//
// JのフリーレゾリューションReJを定義.
//
print(betti(ReJ), "betti");
//
// ReJのベッチーナンバー表示.
// これが,  $\beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^4))$ のBetti diagramである.
//
:
```

5.2 Singular による計算結果

1 Singular による計算結果 $\text{char}(k) = 2$ の時の betti diagram, $\beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^4))$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0:	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:	-	35	140	211	80	10	-	-	-	-	-	-	-	-
2:	-	-	41	367	1466	2829	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1
total:	1	35	181	578	1546	2839	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1

2 Singular による計算結果 $\text{char}(k) = 2$ の時の betti diagram, $\beta_{ij}(\pi_{P_2}(V_2^4))$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0:	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:	-	35	140	211	74	6	-	-	-	-	-	-	-	-
2:	-	-	41	361	1462	2829	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1
total:	1	35	181	572	1536	2835	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1

3 Singular による計算結果 $\text{char}(k) = 0, 3$ の時の betti diagram, $\beta_{ij}(\pi_{P_1}(V_2^4))$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0:	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:	-	35	140	209	35	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2:	-	-	39	322	1456	2829	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1
total:	1	35	179	531	1491	2829	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1

4 Singular による計算結果 $\text{char}(k) = 0, 3$ の時の betti diagram, $\beta_{ij}(\pi_{P_2}(V_2^4))$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0:	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1:	-	35	140	209	35	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2:	-	-	39	322	1456	2829	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1
total:	1	35	179	531	1491	2829	3501	3094	2037	1006	364	91	14	1

6 Conjectures

本論文では, Veronese variety を 2-uple embedding で定義しているが, より一般に d -uple embedding についても定義できる.

Definition 6.1 (Veronese Variety). $\nu_d : \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{N:=\binom{m+d}{d}-1}; (x_0 : x_1 : \cdots : x_m) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : \cdots : x_m^2)$ と書くとき, その像 $V_d^m := \nu_d(\mathbb{P}^m)$ と書き, **Veronese variety** という.

そこで, $d \geq 3$ とした時の V_d^m の higher secant variety に対しても, 適当な行列の小行列式全体の零点集合として記述できないか, という自然な問題がある. 定義方程式に対しては,

Proposition 6.2 (M. Pucci (1998) [10] COROLLARY 2.4). $\text{char}(k) \geq 0, d \geq 2, m \geq 1$ に対して,

$$V_d^m = V\left(\bigcap_{i=1}^{d-1} I_2(\text{Cat}(i, d-i; m+1))\right).$$

但し, $\text{Cat}(i, d-i; m+1)$ は, Catalecticant matrices.

が知られている. また $\text{char}(k) = 0$ であるが,

Proposition 6.3 (V. Kanev (1999) [7] Corollary 2.7). $\text{char}(k) = 0, d = 3, m \geq 1$ に対して,

$$\text{Sec}(V_3^m) = V(\text{Cat}(1, 2; m+1)).$$

Proposition 6.4 (V. Kanev (1999) [7] Theorem 3.3). $\text{char}(k) = 0, d \geq 4, m \geq 1$ に対して,

$$\text{Sec}(V_d^m) = V\left(I_3(\text{Cat}(1, d-1; m+1) \cap \text{Cat}(2, d-2; m+1))\right).$$

が知られている. これらに対しても, $\text{char}(k) > 0$ に一般化できると予想している. つまり,

Conjecture 6.5. $\text{char}(k) \geq 0, d = 3, m \geq 1$ に対して,

$$\text{Sec}^n(V_3^m) = V(I_{n+2}(\text{Cat}(1, 2; m+1))).$$

より一般に,

Conjecture 6.6. $\text{char}(k) \geq 0, d \geq 3, m \geq 1$ に対して,

$$\text{Sec}^n(V_d^m) = V\left(I_{n+2}\left(\bigcap_{i=1}^{d-1} I_2(\text{Cat}(i, d-i; m+1))\right)\right).$$

を予想している. 特に $d = 3$ に関しては証明を試みたが, $d = 2$ とはかなり状況が異なる. 一つは tangent variety が退化している, つまり $\text{Tan}(V_3^m) \neq \text{Sec}(V_3^m)$ となっていること. 二つ目は行列が正方行列でないところである. $d = 2$ の場合は, 行列の対角成分に注目することでうまく場合分けできたが, $d = 3$ ではこれが困難である. さらに $d = 3$ では標数 3 の場合の構造が複雑になり, この点も証明を困難にしている.

Acknowledgment

本研究の過程全般において終始親切な御指導を賜り、本論文をまとめるに際しても親身な御助言と力強い励ましを頂いた、指導教員の楢元教授に心より感謝を申し上げます。

楢研究室の皆さんから様々な御教示ならびに御激励を賜りました。特に網谷 泰治氏、深澤 知氏、古川 勝久氏、渡辺 究氏からは、セミナーにおいて本研究に関する多くのアドバイスを頂いておりました。さらに論文のまとめ、発表練習など本研究に関して幅広く御力添えを賜りました、深くお礼申し上げます。また丹羽 久氏、渡邊 義史氏、眞鍋 岳氏、石井 晋平氏からは主に発表の練習においてコメントを頂いておりました、ありがとうございます。

卒業なされた石川 大蔵氏、他大学において御活躍中の権業 善範氏からも本研究に関しての御激励を賜りました。この場を借りてお礼申し上げます。

また研究室が異なるにも関わらず、論文のチェックや発表の練習などに付き合っていた、生駒 典久氏、今関 靖一郎氏、兵藤 史武氏にも感謝申し上げます。特に今関 靖一郎氏には、修士論文を書くにあたりお互いを励まし合うような形で研究全般においても協力して頂きました、ありがとうございます。

またそれ以外にも、様々な方々から本研究に対する激励やコメントを頂きました。特に代数系院生室所属の方々および齋藤 恆和氏、森澤 貴之氏からは、様々なコメントを頂いておりました。全員の方の名前を書くことは控えますが、皆様に深く感謝しております。

最後に大学、大学院に至るまで精神的・経済的にサポートして頂いた両親・家族に感謝を申し上げます。これらのサポートなしにこの研究を成し遂げることはできなかったと思っています。本当にありがとうございました。

References

- [1] D. Eisenbud : *The geometry of syzygies*. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 229. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [2] R. Gattazzo : *In characteristic $p = 2$ the Veronese variety $V^m \subset \mathbb{P}^{m(m+3)/2}$ and each of its generic projection is set-theoretic complete intersection*, Complete intersections (Acireale, 1983), 221–228, Lecture Notes in Math., 1092, Springer, Berlin, 1984.
- [3] P. Griffiths; J. Harris : *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978.
- [4] J. Harris : *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, 133. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [5] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [6] H. Kaji : 随伴多様体の射影幾何の魅力 , 数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 23-32.
- [7] V. Kanev : Chordal varieties of Veronese varieties and catalecticant matrices. Algebraic geometry, 9. *J. Math. Sci. (New York)* 94 (1999), no. 1, 1114–1125.
- [8] A. Micali, O. E. Villamayor : Sur les algèbres de Clifford, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **1** (1968), 271-304
- [9] E. Park : Projective curves of degree = codimension+2. *Math. Z.* 256 (2007), no. 3, 685–697.
- [10] M. Pucci : The Veronese variety and catalecticant matrices. *J. Algebra* 202 (1998), no. 1, 72–95.
- [11] F. L. Zak : *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Translated from the Russian manuscript by the author. Translations of Mathematical Monographs, 127. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.