

On projective varieties with group actions

楫研究室所属 渡辺 究

1 修士論文の概要

群多様体の作用をもつ代数多様体の研究を行い，修士論文として以下の三つの結果を得た．

- (i) 等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類．

[W1] *Classification of polarized manifolds admitting homogeneous varieties as ample divisors*, preprint (May 2007), submitted.

[W4] *A study of homogeneous varieties in the viewpoint of classification theories of polarized varieties* (仮題), preparation.

- (ii) 例外型線型代数群の作用を持つ代数多様体の分類．

[W2] *Actions of linear algebraic groups of exceptional type on projective varieties*, preprint (December 2007), submitted.

- (iii) 代数的ファイバー空間の構造をもつ等質多様体の分類．

[W3] *Homogeneous varieties with structures of algebraic fiber spaces*, preprint (December 2007).

本発表会では (i) と (ii) について述べる．以下では，断りがない限り多様体は全て非特異射影代数多様体とし，基礎体は複素数体とする．

2 偏極多様体の観点からの等質多様体の研究

多様体 X とその上の豊富な直線束 L の組 (X, L) を偏極多様体と呼ぶ．偏極多様体の研究において，与えられた多様体を線型系 $|L|$ のメンバーとして含むような組 (X, L) の分類問題は，重要かつ中心的な問題の一つであり，多くの研究がなされてきた．

研究 (i) の出発点となったのは，A. J. Sommese 氏と藤田隆夫氏による以下の結果である．Sommese 氏は二次元以上のアーベル多様体を豊富な因子として含む多様体は存在しないことを示した ([S] 参照)．また，藤田氏は，グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ を豊富な因子として含む多様体は $r = 1, r = n - 1, (n, r) = (4, 2)$ の場合を除いて存在しないことを示した ([F1], [F2] 参照)．次が主結果 (i) ([W1]) である．

Theorem 2.1. (X, L) を線型系 $|L|$ のメンバーに等質多様体を含む三次元以上の偏極多様体とする．このとき (X, L) は以下のいずれかと同型である：

- (i) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i)), i = 1, 2,$
- (ii) $(Q^{n+1}, \mathcal{O}_{Q^{n+1}}(1)),$
- (iii) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし， $\mathcal{E}$ は種数が 0 または 1 の曲線 C 上の豊富なベクトル束で， $\mathcal{L}$ は C 上の直線束とし，以下の完全列を満たす：

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^{\oplus n} \rightarrow 0,$$

$$(iv) (\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m}(1, 1)),$$

$$(v) (G(2, \mathbb{C}^{2m}), \mathcal{O}_{\text{Plücker}}(1)),$$

$$(vi) (E_6(\omega_1), \mathcal{O}_{E_6(\omega_1)}(1)).$$

Corollary 2.2. (X, L) を Theorem 2.1 の仮定を満たす偏極多様体とする．そのとき， X は (iii) を除いて等質多様体であり，(iii) は等質多様体ではない．

3 例外型線型代数群の作用をもつ多様体の研究

群多様体の作用をもつ多様体の構造と作用について考える．群の作用は多様体の構造に強い影響を及ぼす．特に，多様体の次元が低い場合や作用する群が大きい場合にいくつかの研究がなされている．例えば，満洲俊樹氏 [M] は $SL(n)$ の作用を持つ n 次元多様体の分類を得た．また，向井茂氏と梅村浩氏 [MU] は $SL(2)$ の作用による稠密な開集合を持つ三次元概等質多様体の研究を行い，中野哲夫氏 [N] により群多様体の作用をもつ三次元の多様体の完全な分類が得られた．

ここで， X を単純線型代数群 G の作用を持つ n 次元多様体とする． G の放物的部分群 P を与えると，それに対応して等質多様体 G/P が得られる．この様にして得られた等質多様体の次元のうち最小の自然数を r_G と記す．M. Andreatta 氏 [A] は作用が非自明ならば $n \geq r_G$ なる不等式が成立することを示した（等号が成り立つときは， X は等質多様体になる）．同論文において， $n = r_G + 1$ なる古典型単純線型代数群 G の非自明な作用を持つ多様体の分類も得られている．次が主結果 (ii) ([W2]) である．

Theorem 3.1. X を n 次元多様体， G を非自明かつ正則に X に作用する単連結な例外型単純線型代数群とする． $n = r_G + 1$ のとき， X は以下のいずれかと同型であり，各々の場合において，作用は一意的である：

- (i) $E_6(\omega_1)$,
- (ii) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
- (iii) $Y \times Z$ ，ここで， Y は $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ または $G_2(\omega_2)$ のいずれかで， Z は曲線とする．
- (iv) $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(m))$ ，ここで， Y は (iii) と同じものとし， $m > 0$ とする．

Remark 3.2. Theorem 3.1 (i) の $E_6(\omega_1)$ には F_4 型の線型代数群が作用している．

参考文献

- [A] M. Andreatta, *Actions of linear algebraic groups on projective manifolds and minimal model program*, Osaka J. Math. 38 (2001), 151-166.
- [F1] T. Fujita, *Impossibility criterion of being an ample divisor*, J. Math. Soc. Japan, 34, (1982), 355-363.
- [F2] T. Fujita, *Vector bundles on ample divisors*, J. Math. Soc. Japan, 33, (1981), 405-414.
- [M] T. Mabuchi, *On the classification of essentially effective $SL(n)$ -actions on algebraic n -folds*, Osaka J. Math. 16 (1979), 745-758.
- [MU] S. Mukai and H. Umemura, *Minimal rational threefolds*, Lect. Notes in Math. 1016, Springer-Verlag, (1983), 490-518.
- [N] T. Nakano, *Regular actions of simple algebraic groups on projective threefolds*, Nagoya Math. J. 116 (1989), 139-148.
- [S] A. J. Sommese, *On manifolds that cannot be ample divisors*, Math. Ann. 221, (1976), 55-72.