超曲面上の有理曲線族の研究

古川勝久

本研究は, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面 $X = X_d \subset \mathbb{P}^n$ に対する

$$M_c(X) = \left\{ f : \mathbb{P}^1 \to X \;\middle|\; \begin{array}{c} \deg f^*(\mathcal{O}_X(1)) = c, \\ f^*_{d-1} : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) \to H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1))) \text{ is surjective} \end{array} \right\}$$

なる $\mathbb{P}^1$ から X への射の族のなす quasi-projective variety をおもな対象として調査する[*1]ものであり, つぎに述べる結果をその起端とする. これは, 超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ 上の直線族のなす多様体 $R_1(X) = \left\{ l \in \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^n) \mid l \subset X \right\}$ (Fano scheme) に関する定理で, 標数 0 の場合は [Barth and Van de Ven, 1978/79] により示され, 一般標数の場合は [Kollár, 1996, V.4.3] により示された:

Theorem A ([Barth and Van de Ven, 1978/79], [Kollár, 1996, V.4.3])**.** Let $X \subset \mathbb{P}^n$ be a hypersurface of degree d, Then

(a) $R_1(X) = \emptyset$ for general X if $d > 2n-3$.

(b) $R_1(X)$ is smooth of dimension $2n-3-d$ for general X if $d \leqslant 2n-3$.

(c) $R_1(X)$ is connected for any X if $d \leqslant 2n-4$, except when $X \subset \mathbb{P}^3$ is a smooth quadric.

定理 (*A*) では超曲面上の直線 (つまり degree 1 の有理曲線) のなす多様体について smooth であるのか, あるいは expected dimension を持つのか, などを調査して居るわけである. 本研究では, この一般化として超曲面上の c 次有理曲線を考察し, その結果としてつぎを得た:

Theorem 1. 基礎体は一般の標数をもつこととし, またさらに次の条件の内いづれかを満たすとする:

(i) $c = 2$ かつ $d \geqslant 2$,

(ii) $c = 3$ かつ $d \geqslant 3$,

(iii) $c = 4$ かつ $d \geqslant 4$,

(iv) $d \geqslant 6$.

このとき d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ について,

(a) $M_c(X) = \emptyset$ for general X if $c(n+1-d)+n-4 < 0$.

(b) $M_c(X)$: smooth of dimension $c(n+1-d)+(n-1)$ for general X if $c(n+1-d)+n-4 \geqslant 0$.

(c) $M_c(X)$: connected for any X if $c(n+1-d)+n-5 \geqslant 0$, except when $X \subset \mathbb{P}^3$: smooth quadric.

また, 定理 (*1*) には, 標数を 0 とする場合に, 類似する先行結果としてつぎのものがある. これは, X の Hilbert scheme の開部分多様体であるところの, X 上の滑かな c 次有理曲線全体 $R_c(X) \subset \mathrm{Hilb}_{ct+1}(X/k)$ についての定理である:

Theorem B ([Harris, Roth, and Starr, 2004, Theorem 1.1], 標数は 0 とする)**.** Let $n > 2$ be an integer and let d be a positive integer such that $d < \frac{n+1}{2}$. For a general hypersurface $X \subset \mathbb{P}^n$ of degree d and for every integer $c \geqslant 1$, the scheme $R_c(X)$ is an integral, local complete intersection scheme of dimension $(n+1-d)c+(n-4)$.

定理 (*1*) と定理 (*B*) との違いを列挙しておく:

[*1] ここで, $\binom{n+d}{d} < cd+1$ であれば $M_c(X) = \emptyset$ であるので, 以後 $\binom{n+d}{d} \geqslant cd+1$ と設定して議論をすすめる.

(a) 定理 (*1*) は $M_c(X)$ を考察の対象とし, その点で制限がある. 一方で 定理 (*B*) は $R_c(X)$ そのものを対象とする. ただし, $d \gg 0$ であれば $M_c(X) = \mathrm{Mor}_c^{\mathrm{imm}}(\mathbb{P}^1, X) = \left\{ f \in \mathrm{Mor}_c(\mathbb{P}^1, X) \;\middle|\; f : \text{immersion} \right\}$ なる等号がなりたつ.

(b) 定理 (*1*) は一般の標数についての命題であり, 定理 (*B*) は標数 0 のみについての命題である.

(c) 定理 (*1*) には "$d \geqslant 6$" などの条件が必要である.

(d) 定理 (*B*) には "$d < \frac{n+1}{2}$" なる条件が必要である.

(e) 導かれる命題の一部が "expected dimension をもつ" ことである点は変らない. ただし他方で, 定理 (*1*) は "smoothness" を示すのに対して, 定理 (*B*) は "integral, local complete intersection" であることを示す.

*

さて, 以降では如何にして定理 (*1*) を示すことができたか概略を述べよう.

はじめに, 超曲面 X 上の直線族 $F(X)$ の一般化として, degree $c \geqslant 1$ をもつ有理曲線 $C \subset X$ に対する, $\mathbb{P}^1$ から C への射の全体 $\mathrm{Mor}_c(\mathbb{P}^1, X)$ を考察した. ただし, このままではある困難が生ずるため, その解消のために開部分多様体 $M_c(X) \subset \mathrm{Mor}_c(\mathbb{P}^1, X)$ を取り, そこに制限して考察をつづけることとした.

研究の手法としては, 定理 (*A*) における Kollár の方法を応用したのだが, 直線から曲線に研究の対象がひろがるために, そのままでは方法を上手く適用できない部分があり, そのひとつとして, つきつめれば次の問題にゆきつく:

Problem. 各 $f \in \mathrm{Mor}_c^{\mathrm{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ とそれにより定まる c 次有理曲線 C をとるときに, C をふくむ d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ (X は $h \in \ker[f_d^* : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \to H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))]$ の零点集合として定められる) に対し, それが導く Normal bundle 間の射 $\delta_f(X) : \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} \to \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}$ を対応させる k-linear map

$$\delta_f : \ker f_d^* \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^*\mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$$

が導かれる. この δ_f の全射性が必要となるのだが, それを示すことはできるのか.

δ_f の全射性の成立することは, 直線の場合 ($c = 1$) は自明である. 一方で一般の曲線の場合 ($c \geqslant 1$) は自明ではない. しかしながら研究に結果として, この全射性を示すことに成功した.

参考文献

W. Barth and A. Van de Ven. Fano varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. Math. (Basel)*, 31(1):96–104, 1978/79. ISSN 0003-889X.

J. Harris, M. Roth, and J. Starr. Rational curves on hypersurfaces of low degree. *J. Reine Angew. Math.*, 571:73–106, 2004. ISSN 0075-4102.

J. Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. ISBN 3-540-60168-6.