

超曲面上の有理曲線族の研究

古川勝久

目次

1	序	1
2	本論	3
2.1	$I, I^\sharp$ および $\mathcal{M}^\sharp$ の構成方法	3
2.2	Smoothness of π_H	4
2.3	Proof of Theorem (1.1)	7
3	Properties of δ_f	8
3.1	δ_f の構成	8
3.2	全射性の検証	11
4	Appendix	16
4.1	$\mathcal{M}_G$ の構成方法	16
4.2	超曲面により定まる射 $D(h)$ の構造	16
4.3	Normal bundle の splitting に関して	17
4.4	f_d^* の全射性に関して	17
4.5	Veronese embedding の Normal bundle に関して	19
	参考文献	20

1 序

本論文の主たる目的は、射影空間 $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面 $X = X_d \subset \mathbb{P}^n$ に対する

$$\mathrm{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X) = \left\{ f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X \left| \begin{array}{l} \deg f^*(\mathcal{O}_X(1)) = c, \\ f_{d-1}^*: H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1))) \text{ is surjective} \end{array} \right. \right\}$$

なる $\mathbb{P}^1$ から X への射の族のなす quasi-projective variety (各々の射 $f \in \mathrm{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X)$ に応じて、 X 上の有理曲線 $C = f(\mathbb{P}^1) \subset X$ を得られる) についての研究である。

その起端はつぎに述べる結果にあり、これは超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ 上の直線族のなす多様体 $F(X) = \{l \in G(1, \mathbb{P}^n) \mid l \subset X\}$ (Fano scheme) に関するもので、標数 0 の場合は [Barth and Van de Ven, 1978/79] により示され、一般標数の場合は [Kollár, 1996, V.4.3] により示された:

Theorem A ([Barth and Van de Ven, 1978/79], [Kollár, 1996, V.4.3]). Let $X \subset \mathbb{P}^n$ be a hypersurface of degree d , Then

- (a) $F(X) = \emptyset$ for general X if $d > 2n - 3$.
- (b) $F(X)$ is smooth of dimension $2n - 3 - d$ for general X if $d \leq 2n - 3$.
- (c) $F(X)$ is connected for any X if $d \leq 2n - 4$, except when $X \subset \mathbb{P}^3$ is a smooth quadric.

定理 (A) では超曲面上の直線 (つまり degree 1 の有理曲線) のなす多様体について smooth であるのか、あるいは expected dimension を持つのか、などを調査して居るわけであるが、対してここでひとつの一般化を試みる。

即ち:

Question. 定理 (A) の前提において, 直線に代て超曲面上の $c \geq 1$ 次有理曲線 (つまり degree 1 のみではない, 一般の degree c をもつ有理曲線) について考察すると, いかなる命題のなりたつか. なにかの条件のもとで有理曲線のなす多様体について, smooth であることや expected dimension を持つことやを示すことができるのかどうか.

この設題に対する回答として得られたのが, つぎの定理である:

Theorem 1.1. 基礎体は一般の標数をもつこととし, またさらに次の条件の内いづれかを満たすとする (条件についての詳細は (2.10) を参照せよ):

(1.1.a) $c = 2$ かつ $d \geq 2$,

(1.1.b) $c = 3$ かつ $d \geq 3$,

(1.1.c) $c = 4$ かつ $d \geq 4$,

(1.1.d) $d \geq 6$.

このとき $\binom{n+d}{d} \geq cd + 1$ であり, かつ $c(n+1-d) + n - 4 \geq 0$ であるなら, $X \subset \mathbb{P}^n$ なる general hypersurface of degree d に対して, $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X)$ は smooth であり expected dimension $c(n+1-d) + (n-1)$ をもつことがわかる.

如何にしてこの定理を示すことができたかを述べよう.

はじめに, 超曲面 X 上の直線族 $F(X)$ の一般化として, degree $c \geq 1$ をもつ有理曲線 $C \subset X$ に対する, $\mathbb{P}^1$ から C への射の全体 $\text{Mor}_c(\mathbb{P}^1, X)$ を考察した. ただし, このままではある困難が生ずるため, その解消のために開部分多様体 $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X) \subset \text{Mor}_c(\mathbb{P}^1, X)$ を取り, そこに制限して考察をつづけることとした.

研究の手法としては, 定理 (A) における Kollár の方法を応用したのだが, 直線から曲線に研究の対象がひろがるために, そのままでは方法を上手く適用できない部分がある. その概略は以下の様になる (§ 2.2.1 も参照):

各 $f \in \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ とそれにより定まる c 次有理曲線 C をとるときに, C をふくむ d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ (X は $h \in \ker[f_d^* : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))]$ の零点集合として定められる) に対し, それが導く Normal bundle 間の射 $\delta_f(X) : \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}$ を対応させる k -linear map

$$\delta_f : \ker f_d^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$$

の全射性が必要となる. それは直線の場合 ($c = 1$) は自明であるのに対し ((2.8) を参照), 一般に曲線の場合 ($c \geq 1$) は自明ではない.

しかしながら研究に結果として, (3.11) においてこの全射性をしめすことに成功し, ここにおいて定理 (1.1) で述べた条件のもと, $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X)$ が smooth であり, かつ expected dimension をもつことが示された.

さて, 定理 (1.1) には, 標数を 0 とする場合に, 類似する先行結果としてつぎのものがある. これは X の Hilbert scheme の開部分多様体であるところの, X 上の滑かな c 次有理曲線全体 $R_c(X) \subset \text{Hilb}_{ct+1}(X/k)$ についてのものである:

Theorem B ([Harris, Roth, and Starr, 2004, Theorem 1.1], 標数は 0 とする). Let $n > 2$ be an integer and let d be a positive integer such that $d < \frac{n+1}{2}$. For a general hypersurface $X \subset \mathbb{P}^n$ of degree d and for every integer $c \geq 1$, the scheme $R_c(X)$ is an integral, local complete intersection scheme of dimension $(n+1-d)c + (n-4)$.

それでは, 定理 (1.1) と定理 (B) とを比較してみよう:

- (a) 定理 (1.1) は $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X)$ を考察の対象とし, その点で制限がある. 一方で 定理 (B) は $R_c(X)$ そのものを対象とする. ただし, $d \gg 0$ であれば $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X) = \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, X) = \{f \in \text{Mor}_c(\mathbb{P}^1, X) \mid f : \text{immersion}\}$

なる等号がなりたつ ((4.12) を参照).

- (b) 定理 (1.1) は一般の標数についての命題であり, 定理 (B) は標数 0 のみについての命題である.
- (c) 定理 (1.1) には “ $d \geq 6$ ” などの条件が必要である.
- (d) 定理 (B) には “ $d < \frac{n+1}{2}$ ” なる条件が必要である.
- (e) 導かれる命題の一部が “expected dimension をもつ” ことである点は変らない. ただし他方で, 定理 (1.1) は “smoothness” を示すのに対して, 定理 (B) は “integral, local complete intersection” であることを示す.

まとめると定理 (1.1) は, (a) 有理曲線の範囲を小さくする制限と (c) “ $d \geq 6$ ” などの条件とがあるが, 一方で (b) 一般の標数である点と, (d) 条件 “ $d < \frac{n+1}{2}$ ” の制限をもたない点とにおいて優れて居る.

2 本論

2.1 $I, I^\sharp$ および $\mathcal{M}^\sharp$ の構成方法

Definition - Proposition 2.1. $0 < r < n, 0 < c$ として $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)), W = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ とおく. このとき $\text{Mor}_c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}_*(\text{Hom}(V, S^c W))$ なる quasi-projective variety of dimension $(n+1)\binom{c+r}{r} - 1$ が存在して,

$$\text{ev}: \mathbb{P}^r \times_k \text{Mor}_c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{P}^n$$

なる写像がさだまる.

以下 $\mathcal{M} = \text{Mor}_c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n)$ と表すことにする.

Proof. $H = \text{Hom}(V, S^c W), \overline{\mathcal{M}} = \mathbb{P}_*(H)$ と表記する. $\overline{\mathcal{M}}$ の上の sheaf の全射 $H^* \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}}(1)$ および k -linear map $V \times H \rightarrow S^c W$ により

$$\varepsilon: V \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}}(-1) \rightarrow V \otimes_k H \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}} \rightarrow S^c W \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}} \quad (2.1.1)$$

なる $\overline{\mathcal{M}}$ 上の写像を得て, これを $p: \mathbb{P}^r \times_k \overline{\mathcal{M}} = \mathbb{P}(W \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}}) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$ でひきもどし, また $W_{\mathbb{P}(W \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}})}(1)$ を使用することで, $\mathbb{P}^r \times_k \overline{\mathcal{M}}$ 上の写像:

$$\varepsilon': p^*(V \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}}(-1)) \rightarrow p^*(S^c W \otimes_k \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}}) \rightarrow S^c(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(c)$$

をえられる. ここで $V = \left\{ (x, f) \in \mathbb{P}^1 \times_k \overline{\mathcal{M}} \mid \varepsilon'_{(x,f)}: \text{surjective} \right\}$ とおき, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \setminus p((\mathbb{P}^1 \times_k \overline{\mathcal{M}}) \setminus V)$ とさだめると, ε' は $\mathcal{M}$ の上で全射となる. 故に [Hartshorne, 1977, II, Prop. 7.12] から, 写像 $\text{ev}: \mathbb{P}(W_{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathbb{P}(V_{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ がみちびかれる. $\square$

Remark 2.2. $f \in \mathcal{M}$ に対し, $\varepsilon'_f: V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ は sheaf の全射であることが base point free である事実に対応する.

Definition - Proposition 2.3. 各 $0 \leq d$ に対して $H_d = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|$ と置く. このとき, d 次超曲面とそこにふくまれる c 次曲線への射との対による多様体:

$$I = \{ (X, f) \in H_d \times \mathcal{M} \mid f(\mathbb{P}^1) \subset X \}$$

が存在する. さらに $m := \max \{ \dim \text{im } f_d^* \mid f \in \mathcal{M} \}$ として $\mathcal{M}^\sharp := \{ f \in \mathcal{M} \mid \dim \text{im } f_d^* = m \}$ とさだめると, $\binom{n+d}{d} - m > 0$ であるなら $I^\sharp := I|_{\mathcal{M}^\sharp}$ は $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d} - m - 1}$ -bundle on $\mathcal{M}^\sharp$ となることがわかる.

Proof. はじめに (2.1.1) により $\mathcal{M}$ 上の写像

$$\varepsilon^d: (S^d V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{M}})(-d) \rightarrow S^d(S^c W \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \rightarrow S^{cd} W \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$$

を定義する. これは $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ に対し

$$f_d^* = \varepsilon^d|_f: H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd))$$

をさだめる写像である. さて ε^d は $Y = H_d \times_k \mathcal{M} \simeq \mathbb{P}_*((S^d V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{M}})(-d))$ の上の写像

$$E: S^{cd} W^* \otimes_k \mathcal{O}_Y \rightarrow (S^d V^* \otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(d)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y(1)$$

を決定するが, これにより $I := Z_+(\text{im } E(-1)) \subset Y$ をさだめることができる.

ここで $\pi_{\mathcal{M}}: I \rightarrow \mathcal{M}$ とすると, $f \in \mathcal{M}$ をとれば $\pi_{\mathcal{M}}^{-1}(f) = \mathbb{P}_*(\ker(\varepsilon^d)|_f)$ のなりたつことがわかる. 実際, $I|_f$ は $\text{im}[H^0(E|_f): H^0(S^{cd} W^* \otimes_k \mathcal{O}_{H_d} Z)]$ なる H_d の一次式でさだまる linear subspace であり, 他方 $H^0(E|_f)$ なる写像は $\varepsilon^d|_f$ の dual となるので (2.4) により $I|_f = \mathbb{P}(\text{coker } H^0(E|_f)) = \mathbb{P}_*(\ker(\varepsilon^d)|_f)$ であることがわかる.

さて m の定義から $\ker(\varepsilon^d)$ は $\mathcal{M}^\sharp$ 上 locally free sheaf となるが, このとき上の議論から $f \in \mathcal{M}^\sharp$ の fiber を比較すれば $I|_{\mathcal{M}^\sharp} = \mathbb{P}_*(\ker(\varepsilon^d)|_{\mathcal{M}^\sharp})$ の成立することが示される. $\square$

Lemma 2.4. $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ を linear subvariety とするとき, $\ker(V \rightarrow U)$ は L を定義する一次式となる.

Remark 2.5. (2.5.a) I の各 irreducible component J に対して, $\text{codim}(J, \mathcal{M}_d) \leq \binom{cd+r}{r}$ となる.

(2.5.b) $\exists f \in \mathcal{M}$ s.t. $f_1^*: \text{surjective}$ ならば $m = \binom{cd+r}{r}$ となる. 逆はなりたつとは限らない.

(2.5.c) $\overline{I}^\sharp \subset I$ について: $\overline{I}^\sharp = I$ とは限らないが, $\overline{I}^\sharp \rightarrow \mathcal{M}$ にはなる.

(2.5.d) $\mathcal{M} = \text{Mor}_1(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n)$ のとき $I = \mathbb{P}_*(\ker(\varepsilon^*)) = \overline{I}^\sharp$, $m = \binom{d+r}{r}$ である.

Remark 2.6. 主に smooth な有理曲線を対象とするため, 以後 $r = 1, m = cd + 1, \binom{n+d}{d} \geq cd + 1$ として議論する. このときは $\mathcal{M}^\sharp \subset \mathcal{M}^{\text{imm}}$ となり ((4.7) を参照), 特に $d \gg 0$ であれば $\mathcal{M}^\sharp = \mathcal{M}^{\text{imm}}$ となることがわかる ((4.12) を参照). また, “ $\sharp$ ” は実際は d に依存するものなので, それを明示するときには $\mathcal{M}^{(d)}, I^{(d)}$ の様に表すこととする.

2.2 Smoothness of π_H

2.2.1 概要

本節 (2.9) における Z^0 を考察することは, [Kollár, 1996, V.4.3] によるアイデアである. ここでは Z^0 の codimension をみる必要があるのだが, そのためには δ_f なる k -linear map の全射性を必要とする. これは [Kollár, 1996, V.4.3] における様に直線を考察するのであれば自明であるが ((2.8) を参照), 本研究の対象である有理曲線について見るときには自明ではない. 最終的には (3.11) にて, いくつかの条件のもとでその全射性をしめす.

2.2.2 Codimension of the singular locus of π_H

$c \geq 0, d \geq 1$ に対し $\mathcal{M} = \text{Mor}_c(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$, $H = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|$ とさだめ, また $I, I^\sharp, \mathcal{M}^\sharp$ などは (2.3), (2.6) によるものとする.

Lemma 2.7 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.7]). $f \in \mathcal{M}^{\text{imm}}$ をとり, 対応する有理曲線を $C \subset \mathbb{P}^n$ とし, また $X \subset \mathbb{P}^n$ を C をふくむ d 次超曲面 であるとする. このとき,

$$\delta_f(X): H^0(\mathbb{P}^1, f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n})$$

なる写像がさだまり, また

(2.7.a) $P = f(Q) \in C$ をとる. このとき X is singular at P iff $\delta_f(X) \otimes k(Q) = 0$.

(2.7.b) X は C の上では smooth であるとする. このとき $\pi_H: I^\sharp \rightarrow H$ が (f, X) にて smooth であることと $\delta_f(X)$ が全射であることが同値になる.

Remark 2.8. ここに表れる

$$\delta_f : \ker f_d^* \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$$

なる k -linear map は Kollár の手法を一般化する際の鍵となる. 詳細は § 3 にて別に議論する.

ただし [Kollár, 1996, V.4.3] における研究対象であるところの $c = 1$ の場合 ($f(\mathbb{P}^1)$ が直線となる) には, δ_f の対応は単純になる: 実際, 標準の座標 $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n; (t, u) \mapsto (t, u, 0, \dots, 0)$ をとれば $\ell = f(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^n$ を含む任意の d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ は

$$h = z_2 h_2 + \dots + z_n h_n \quad \deg h_i = d - 1$$

なる d 次多項式により書くことができ, このとき

$$\delta_f(h) = (f^* h_2, \dots, f^* h_n) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^* \mathcal{N}_{\ell|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1))^{\oplus n-1}$$

の成立つことがわかるので.

Proof. はじめに図式 (3.1.2) から X の p で smooth なることと $\delta_f(X)_p = 0$ となることとが同値であることがわかる. つぎに π_H が smooth であるためには $(d\pi_H)_{(f,X)} : T_{(f,X)} I^\sharp \rightarrow T_{(f,X)} H$ が全射であればよく, そのためには $\ker((d\pi_H)_{(f,X)})$ が expected dimension $c(n+1-d) - (n-1)$ をもてばよい. $B = \pi_H^{-1}(X)$ とおけば [Hartshorne, 1977, II, prop.8.10, prop.8.11] より

$$\Omega_I|_M \rightarrow \Omega_H|_M \rightarrow \Omega_{I|H}|_M = \Omega_M \rightarrow 0$$

なる B 上の exact sequence が存在するので $\ker((d\pi_H)_{(f,X)}) = T_f B$ であることがわかる. 一方 $B = \pi_H^{-1}(X) = \operatorname{Mor}_c^\sharp(\mathbb{P}^1, X)$ なので $\ker((d\pi_H)_{(f,X)}) = T_f \operatorname{Mor}_c^\sharp(\mathbb{P}^1, X)$ であり, [Kollár, 1996, I.2.16] からその次元は $h^0(f^* T_X)$ に一致する. 以上まとめて

$$\pi_H \text{ is smooth at } (f, X) \iff h^0(f^* T_X) = c(n+1-d) - (n-1)$$

であることがわかる. つぎに $\mathbb{P}^1$ 上の exact sequence $0 \rightarrow f^* \mathcal{N}_{C|X} \rightarrow f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} \rightarrow f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$ により

$$0 \rightarrow H^0(f^* \mathcal{N}_{C|X}) \rightarrow H^0(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\delta_f(X)} H^0(f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^1(f^* \mathcal{N}_{C|X}) \rightarrow 0.$$

なる列が得られるが, $h^0(f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd)) = cd + 1$ であり, また $h^0(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}) = c(n+1) - 2 + (n-1)$ であるので, $h^0(\mathcal{N}_{C|X}) - h^1(\mathcal{N}_{C|X}) = c(n+1-d) + n - 4$ なる等式がみちびかれる. ここで $h^0(f^* T_X) = h^0(\mathcal{N}_{C|X}) + 3$ であるので, まとめて

$$h^0(f^* T_X) = c(n+1-d) - (n-1) \iff h^1(\mathcal{N}_{C|X}) = 0 \iff \delta_f(X) \text{ is surjective.}$$

なる関係が得られる. □

Proposition 2.9 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.9]). $f \in \mathcal{M}^{(d-1)}$ に対し, (2.9.a) (3.1) における δ_f が全射であるとし, また (2.9.b) $cd \geq 2 \cdot \max\{a_i \mid f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)\}$ であるとする. このとき

$$I^0 = \{(f, X) \in I^\sharp \mid X \text{ is smooth along } f(\mathbb{P}^1)\},$$

$$Z^0 = \{(f, X) \in I^0 \mid \pi_H \text{ is not smooth at } (f, X)\}$$

なるものをさだめると, $\mathcal{M}^{(d-1)}$ に制限すれば $\operatorname{codim}(Z^0, I^0)|_{\mathcal{M}^{(d-1)}} \geq c(n+1-d) - n - 3$ のなりたつことがわかる.

Remark 2.10. (3.11) により $d \geq 3$ であるか, あるいは $c = 2$ かつ $d \geq 2$ であるかすると, $f \in \mathcal{M}^{(d-1)}$ は全射となる. また (4.6) により $\max a_i \leq 3c - 2$ であることはわかるので, $d \geq \frac{2(3c-2)}{c} = 6 - \frac{4}{c}$ であれば条件 (2.9.b) は満たされる. さらに [Kaji, 1985, 2.8] によれば, $f \in \operatorname{Mor}_c^{\operatorname{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$ に対して

$$\begin{cases} \max a_i \leq 3c - 5 & \text{if } p \neq 2 \\ \max a_i \leq 3c - 4 & \text{if } p = 2 \end{cases}$$

である. 特に $f \in \text{Mor}_4^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ とすると $\max a_i \leq 7$ となるので, $d \geq \frac{2 \cdot 7}{4} = 3.5$ であれば条件 (2.9.b) は満たされることとなる.

Proof. 任意の $f \in \mathcal{M}^{(d-1)}$ に対して $\text{codim}(Z_f^0, I_f^0) = c(n+1-d) - n - 3$ が成立すれば充分である. ただし, $Z_f^0 = Z^0 \cap \pi_{\mathcal{N}^0}^{-1}(f)$, $I_f^0 = I^0 \cap \pi_{\mathcal{N}^0}^{-1}(f)$ とおいた. $\iota: \ker f_d^* \dashrightarrow \pi_{\mathcal{N}^0}^{-1}(f)$ をとり

$$K := \{ \alpha \in \mathbb{H} \mid \alpha(H^0(\mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n})) \subsetneq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd)) \}.$$

と定めれば (2.7) から $\iota(\delta_f^{-1}(K)) \cap I_f^0 = Z_f^0$ となり, 故に $\text{codim}(Z_f^0, I_f^0) = \text{codim}(K, \mathbb{H})$ が成立する.

さて, $\mathbb{P}^1$ 上での splitting $f^*\mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}(a_i)$ をとると $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd - a_i))$ となり, hyperplane $V \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd))$ に対し,

$$K_V := \{ \alpha \in \mathbb{H} \mid \text{im } \alpha \subset V \}$$

と定めることにすれば, $K = \bigcup_{V \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd))} K_V$ が成立ち, また

$$K_{a_i, cd}(V) = \{ \alpha_i \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd - a_i)) \mid \alpha_i \cdot H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)) \subset V \}$$

に対し $K_V = \bigoplus_{i=1}^{n-1} K_{a_i, cd}(V)$ が成立つ. ここで $cd \geq 2 \cdot \max a_i$ の前提より (2.14) を適用すると, general な V について $\text{codim } K_V = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + 1) = c(n+1) + n - 3$ が成立し, それ故 $\text{codim } K = c(n+1-d) + n - 3$ となることも示される. $\square$

Proposition 2.11 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.8]). (2.9) と同じ前提をおく. このとき

$$S(I^\sharp) = \left\{ (f, X) \in I^\sharp \mid \exists P \in f(\mathbb{P}^1) \text{ s.t. } X \text{ is singular at } P \right\}$$

と定めれば $\text{codim } S(I^\sharp)|_{\mathcal{M}^{(d-1)}} \geq n - 2$ が成立する.

Proof. $\forall f \in \mathcal{M}^{(d-1)}$ を取り $S(I^\sharp)_f$ をみればよい. 各 $P \in \mathbb{P}^1$ に対して $V_P = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd)(-P)) \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd))$ をさため, さらに $K'_{V_P} := \{ \alpha \in \mathbb{H} \mid \text{im } \alpha \subset V_P \}$ をさだめる. これは (2.13) により P で singular な X 全体に対応するものとなり, また $\text{codim } K'_{V_P} = n - 1$ とわかる. 故に $K' = \bigcup_{P \in \mathbb{P}^1} K'_{V_P}$ とすれば $\iota(\delta_f^{-1}(K')) = S(I^\sharp)_f$ であり, かつ $\text{codim } K' = n - 2$ であることがわかる. $\square$

Definition 2.12. かけ算写像を

$$m_s: k[t, u]_s \times k[t, u]_{e-s} \rightarrow k[t, u]_e$$

とするとき, linear subspace $V \subset k[t, u]_e$ に対して

$$K_{s,e}(V) := \{ g \in k[t, u]_{e-s} \mid m_s(k[t, u]_s \times \{g\}) \subset V \}.$$

とさだめる.

Lemma 2.13 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.11]). $V \subset k[t, u]_e$ を任意の hyperplane とする. このときつぎのいずれかが成立する.

(2.13.a) ある $p \in \mathbb{P}^1$ が存在して $V = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(e)(-p))$, $K_{s,e}(V) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(e-s)(-p))$ とかける; あるいは,

(2.13.b) その様な p は存在せず, このときは $\text{codim}(K_{s,e}(V), k[t, u]_{e-s}) \geq 2$ となる.

Lemma 2.14. (2.14.a) $\text{codim}(K_{s,e}(V), k[t, u]_{e-s}) = s + 1$ for general V if $e \geq 2s$.

(2.14.b) $K_{s,e}(V) = 0$ for general V if $e < 2s$.

Proof. V は hyperplane であるので $c_0, \dots, c_e \in k$ がとれて,

$$V = \{v_0 t^e + v_1 t^{e-1} u + \dots + v_e u^e \in k[t, u]_e \mid c_0 v_0 + \dots + c_e v_e = 0\}.$$

と書ける. このとき

$$K_{s,e}(V) = \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 t^{e-s} + \xi_1 t^{e-s-1} u + \dots + \xi_{e-s} u^{e-s} \in k[t, u]_{e-s} \\ \left| \begin{array}{l} c_0 \xi_0 + \dots + c_{e-s} \xi_{e-s} \\ = c_1 \xi_0 + \dots + c_{e-s+1} \xi_{e-s} \\ = \dots \\ = c_s \xi_0 + \dots + c_e \xi_{e-s} \\ = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

と表される. ここで $\text{codim } K_{s,e}(V) = 1$ であるなら, $p = (a, b) \in \mathbb{P}^1$ が存在し $(c_0, \dots, c_e) = (a^e, a^{e-1}b, \dots, b^e)$ となり, 故にこのときは

$$V = \ker [k[t, u] \rightarrow k[w]; (t, u) \mapsto (aw, bw)]_e = (bt - au)_e = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(e)(-p)).$$

とかけることになる. つぎに, 対応 $\{V \subset k[t, u]_e\} \simeq \mathbb{P}^e; V \mapsto (c_0, c_1, \dots, c_e)$ をみることにすると,

$$\{V \mid \text{codim } K_{s,e}(V) = q\} \simeq \left\{ (c_0, c_1, \dots, c_e) \mid \text{rk} \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c_{e-s} \\ c_1 & \dots & c_{e-s+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_s & \dots & c_e \end{bmatrix} = q \right\}$$

の成立することがわかる. ここで, $e - s + 1 \geq s + 1$ (i.e., $e \geq 2s$) であるなら, general な V に対して $\text{codim } K_{s,e}(V) = s + 1$ となることが示され, また $e - s + 1 < s + 1$ (i.e., $e < 2s$) であるなら, general な V に対して $K_{s,e}(V) = 0$ (i.e., $\text{codim } K_{s,e}(V) = e - s + 1$) となることが示される. $\square$

2.3 Proof of Theorem (1.1)

$\binom{n+d}{d} < cd + 1$ であると, $\text{Mor}_c^{(d)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \emptyset$ であるので, 以下の諸命題では $\binom{n+d}{d} \geq cd + 1$ を前提としておく.

Proposition 2.15 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.1]). $X \subset \mathbb{P}^n$ を general hypersurface of degree d とする. このとき $c(n+1-d) + n - 3 \leq 0$ であるなら $\text{Mor}_c^\sharp(\mathbb{P}^1, X) = \emptyset$ となる.

Proof. π_H を surjective とすると, general な X に対して $\pi_H^{-1}(X)$ は expected dimension をもつ. 故に $0 \leq \dim \text{Mor}_c^\sharp(\mathbb{P}^1, X) \leq 2$ であるが, しかしこれは $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)f$ をふくむこと^{*1} に矛盾する. よつて π_H は not surjective であり, general な X については $\text{Mor}_c^\sharp(\mathbb{P}^1, X) = \emptyset$ となる. $\square$

つぎの命題により (1.1) は示されることになる:

Proposition 2.16 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.2]). (2.9) の条件が成立して居るとして, また $\binom{n+d}{d} \geq cd + 1$ であり, かつ $c(n+1-d) + n - 4 \geq 0$ であるとする. このとき $X \subset \mathbb{P}^n$ を general hypersurface of degree d とすれば $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X)$ は smooth であり expected dimension $c(n+1-d) + (n-1)$ をもつことがわかる.

Proof. (2.9) により $\text{codim}(Z^0, I^0) \geq 1$ であることがわかるので, $\pi_H: I^{(d-1)} \rightarrow H$ は general な点で smooth であり, とくにそれは open mapping なので surjective となる. $H^0 \subset H$ を smooth hypersurfaces のあつまりである open subset とし, このとき $X \notin \pi_H(Z^0)$ を取れるのであれば, $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X) = \pi_H^{-1}(X)$ は smooth となる.

^{*1} $\dim f_d^* = m$ とすると, $a \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ に対しても $\dim(f \circ a)_d^* = m$ である.

もし $\pi: Z^0 \rightarrow H$ が dominant であるなら, ある irreducible component $V \subset Z^0$ についても $\pi|_V$ は dominant で, このとき general な $X \in H$ に対して $B = \text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X) \cap V \neq \emptyset$ が成立することになる. ここで $\dim B = \dim \text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X) - \text{codim}(Z^0, I^0) \leq c(n+1-d) + (n-1) - c(n+1-d) + (n-3) = 2$ と計算されるが, 一方で $f \in B$ に対し $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)f \subset B^{*2}$ であり $\dim \text{Aut}(\mathbb{P}^1) = 3$ であるから矛盾が生ずる. 故に $B = \emptyset$ であり, $X \notin \pi_H(Z^0)$ となることが示される. $\square$

Proposition 2.17 (cf. [Kollár, 1996, V.4.3.3]). (2.9) の条件が成立して居るとする. このとき $X_2 \subset \mathbb{P}^3$: smooth quadric をのぞく, $X \subset \mathbb{P}^n$ なる general hypersurface of degree d に対して, $\binom{n+d}{d} \geq cd+1$ および $c(n+1-d) + n-5 \geq 0$ を満たせば, $\text{Mor}_c^{(d-1)}(\mathbb{P}^1, X)$ は connected となる.

Proof. $L \subset H$ を general な line として取ると, (2.10) および (2.11) によりつぎの不等式を得る:

$$\begin{aligned} \text{codim}(Z^0 \cap \pi_H^{-1}(L), \pi_H^{-1}(L)) &\geq c(n+1-d) + n-3 \\ \text{codim}(S(I^{(d-1)}) \cap \pi_H^{-1}(L), \pi_H^{-1}(L)) &\geq n-2 \end{aligned}$$

故に $c(n+1-d) + n-3 \geq 2$ かつ $n-2 \geq 2$ であるなら, codimension 2 の locus をのぞいて $\pi_H|_L$ は smooth となる. ここで Stein factorization により

$$\pi_H|_L: \pi_H^{-1}(L) \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{\pi_2} L$$

なる射をとると, 実は π_2 は isomorphism であることがわかる:

実際まづ, ある点 $P \in C$ で π_2 が分岐をもつとすると, $\pi_1^{-1}(P) \subset \pi_H^{-1}(L)$ はその上で $\pi_H|_L$ を smooth としない ($\exists Q \in \pi_1^{-1}(P)$, $Q \in \exists U \subset \pi_H^{-1}(L)$ において $\pi_H|_L$ が smooth であるなら, general な点 $R \in \pi_H(U) \setminus \pi_H(Q)$ の fiber $\pi_H^{-1}(R) \cap U$ は smooth subvariety でなければならない. しかし一方で P は分岐点であるので, $\# \pi_2^{-1}(R) \geq 2$ であり $\pi_H^{-1}(R) \cap U$ は smooth とはなり得ず矛盾が生ずる), codimension 1 の subscheme となる. しかしこれは上に述べたことと矛盾する. 故に π_2 は étale となるが, $\mathbb{P}^1$ は simply connected なので π_2 は trivial covering となる. L general より $\pi_H^{-1}(L)$ は connected なので, C も connected であり, 以上まとめて, π_2 が isomorphism であると示された.

これから $\pi_H|_L$ は connected fiber をもつこととなるが, L は general なので π_H 自体が connected fiber をもつことになる (H の general な点で π_H は connected fiber をもつので, π_H について Stein factorization を取れば, 結局すべての点で connected fiber をもつことが示される). $\square$

3 Properties of δ_f

3.1 δ_f の構成

Definition - Proposition 3.1. $f \in \text{Mor}_c(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ を immersion とし, $C \subset \mathbb{P}^n$ を f により決まる smooth rational curve of degree c とする. このとき $d \geq 1$ に対し, $\mathbb{H}^{(d)} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$ とおけば, 自然な k -linear map

$$\delta_f^{(d)}: \ker f_d^* \rightarrow \mathbb{H}^{(d)}$$

がさだまる.

以下では $\delta_f = \delta_f^{(d)}$, $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{(d)}$ と表記する.

^{*2} $(f, X) \in Z^0$ であるなら, $a \in \text{Aut} \mathbb{P}^1$ に対し $(f \circ a, X) \in Z^0$ もなりたつ. 実際, π_H の smoothness は $\delta_f(X)$ が全射かどうかにかかっている.

Proof. はじめに $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ に対し, $\mathcal{V} = k \cdot dz_0 + \cdots + k \cdot dz_n$ なる k -linear space をさだめ, また $\mathcal{P}$ を $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ の一次の principal part のなす bundle とする. このとき, つぎの $\mathbb{P}^1$ 上の可換図式がさだまる. とくに $\mathcal{V}^* \otimes_k f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ から $f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}$ への写像を γ と名付けておく.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & \mathcal{P}^\vee \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & \mathcal{V}^* \otimes_k f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) & \longrightarrow & f^* T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \gamma & & \downarrow \\
 & & & & f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} & \xlongequal{\quad} & f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{3.1.1}$$

つぎに $h \in \ker f_d$ をとり, これにより決まる超曲面を $X \subset \mathbb{P}^n$ とする. $f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n} = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ であるので, $\delta_f(h)$ は以下の $\mathbb{P}^1$ 上の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T_{\mathbb{P}^2} & \xlongequal{\quad} & T_{\mathbb{P}^2} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & f^* T_X & \longrightarrow & f^* T_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & f^* \mathcal{N}_{C|X} & \longrightarrow & f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{\delta_f(d)} & f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

により定めることができる. 後はこの対応による δ_f の線形性をみればよい. (4.3) での議論によると,

$$D(h): \mathcal{V}^* \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d); \sum \frac{\partial}{\partial z_i} \otimes g_i \rightarrow \sum g_i \frac{\partial h}{\partial z_j}$$

なる morphism of bundles on $\mathbb{P}^n$ をとるとき, $\mathbb{P}^1$ の上で

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{V}^* \otimes_k f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) & & \\
 \downarrow \gamma \quad \searrow f^* D(h) & & \\
 f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{\delta_f(h)} & f^* \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}
 \end{array} \tag{3.1.2}$$

なる可換図式が成立することがわかる. これにより δ_f は以下の図式のごとく k -linear map の合成と理解される

から, その線形性のなりたつことがわかる:

$$\begin{array}{ccc}
 & \delta_f & \rightarrow \mathbb{H} \\
 \ker f_d^* & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \gamma^* \\
 \subset & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) & \mathcal{V} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)), f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) \\
 & \downarrow D & \parallel \\
 & \mathcal{V} \otimes_k H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) & \xrightarrow{F} \mathcal{V} \otimes_k H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)))
 \end{array} \quad (3.1.3)$$

ただし $F = F^{(d-1)} = 1_{\mathcal{V}} \otimes f_{d-1}^*$ とおいた.

□

Remark 3.2. 各 $h \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ に対して, $\mathbb{P}^n$ 上の bundle 間の射

$$D(h): \mathcal{V}^* \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d); \sum \frac{\partial}{\partial z_i} \otimes g_i \mapsto \sum g_i \frac{\partial h}{\partial z_j}$$

がさだまり, これは $\sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial z_i}$ 倍射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{V}^* \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1); 1 \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \otimes 1$ と合成すると, Euler's Formula により $d \cdot h$ 倍射に等しくなる. つまりつぎの図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{\sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial z_i}} & \mathcal{V}^* \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0 \\
 & & & \searrow & \downarrow D(h) & & \\
 & & & & & \searrow d \cdot h & \\
 & & & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)
 \end{array}$$

これらの射を超曲面 $X = Z(h)$ の上の制限すると, $h|_X = 0$ であることから, $D(h)|_X$ は X 上の bundle の left exact sequence

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbb{P}^n}|_X \rightarrow \mathcal{O}_X(d) = \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}$$

をみちびくこととなる.

Remark 3.3. $p \nmid d$ であるなら D は単射となる: 実際,

$$\zeta: \mathcal{V} \otimes_k H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)); \sum dz_i \otimes h_i \mapsto \sum h_i z_i$$

とさだめると, Euler's Formula により $\zeta \circ D$ は d 倍写像であり同型となるから, 特に ζ は全射で D は単射となる.

Remark 3.4. $p \mid d$ であるときは,

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(pe))^\sim; h \mapsto h^p$$

なる対応が k -linear map となる. ただし k -linear space $\mathcal{V}$ に対し “ $\cdot$ ” をもともとの k の作用として, あらたな k の作用 “ $\bullet$ ” を

$$a \bullet v = a^p \cdot v \text{ for } a \in k, v \in \mathcal{V}$$

と決めた時さだまる k -linear space を $\mathcal{V}^\sim$ と表した. 注意として, $\mathcal{V}$ と $\mathcal{V}^\sim$ とは集合として一致し, とくに基底が $1:1$ に対応するので次元も等しくなる.

Lemma 3.5. $p \mid d$ とする. このとき $\ker f_d^* \cap \ker D = (\ker f_{p^{-1} \cdot d}^*)^p$ が成立し, それ故に $\dim(\ker f_d^* \cap \ker D) = \dim \ker f_{p^{-1} \cdot d}^* \leq \binom{n+p^{-1} \cdot d}{p^{-1} \cdot d} - (c \cdot p^{-1} \cdot d + 1)$ なる不等式がなりたつ. 特に $p = d$ であるときは $\dim \ker(f_d^* \cap \ker D) = \dim f_1^*$ となる.

Proof. $e = p^{-1} \cdot d$ とおく. このとき $\ker D = \left\langle \left\{ z_0^{p^{i_0}} \dots z_n^{p^{i_n}} \mid \sum i_k = e \right\} \right\rangle$ と記述できて, $h \in \ker f_d^* \cap \ker D$ をとれば,

$$h = \sum_{i_0 + \dots + i_n = e} \alpha_{i_0, \dots, i_n} z_0^{p^{i_0}} \dots z_n^{p^{i_n}} = \left(\sum_{i_0 + \dots + i_n = e} \alpha_{i_0, \dots, i_n}^{\frac{1}{p}} z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} \right)^p$$

と表せられるので, $f^*(h) = 0$ であることから $h' = \sum_{i_0 + \dots + i_n = e} \alpha_{i_0, \dots, i_n}^{\frac{1}{p}} z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n}$ として $f^*(h') = 0$ となる. つまり $h' \in \ker f_e^*$ をとれて $h = (h')^p$ となる. $\square$

また $\delta_f^{(d)}$ と $\delta_f^{(d+m)}$ との間にはつぎの関係がなりたつ:

Proposition 3.6. $d \geq 1, m > 0$ に対し以下の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} \ker f_d^* \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) & \xrightarrow{\delta_f^{(d)} \otimes f_m^*} & \mathbb{H}^{(d)} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker f_{d+m}^* & \xrightarrow{\delta_f^{(d+m)}} & \mathbb{H}^{(d+m)} \end{array}$$

Proof. $h \in \ker f_d^*, g \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ に対して,

$$\begin{aligned} \delta_f(g h) &= (\gamma^*)^{-1}(f^*(D(g h))) = (\gamma^*)^{-1}(f^*(h D(g) + (g D(h)))) \\ &= (\gamma^*)^{-1}(f^*(g) f^*(D(h))) = f^*(g) \delta_f(h) \end{aligned}$$

と計算できるので. $\square$

3.2 全射性の検証

($\sharp$) $d \geq 1$ とし, また $f \in \text{Mor}_c(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ を immersion として, $C = f(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^n$ とおく. さらに f_{d-1}^* は全射であるものとし, $\max\{a_i \mid f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)\} \leq cd$ とする.

以下では, この条件 ($\sharp$) を満す f に対する $\delta_f^{(d)}$ が全射となるための条件について調べることにしよう.

3.2.1 $\mathbb{P}^n = \langle C \rangle$ への帰着

Proposition 3.7. $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ を条件 ($\sharp$) を満すものとし, $L^{n-m} = \langle C \rangle$ を C のはる $n-m$ 次 linear variety とする. このとき $\bar{f}: \mathbb{P}^1 \rightarrow L \simeq \mathbb{P}^{n-m}$ についての $\delta_{\bar{f}}$ が全射となることと, もとの $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ についての δ_f が全射となることは同値である.

Proof. $l_1, \dots, l_m$ を L を定義する一次式とする. このとき, k -vector space $U = k \cdot dl_1 + \dots + k \cdot dl_m$ をとり, normal bundle 間の $\mathbb{P}^1$ 上の split exact sequence:

$$0 \rightarrow f^* \mathcal{N}_{C|L} \rightarrow f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} \rightarrow f^* \mathcal{N}_{L|\mathbb{P}^n} = U^* \otimes_k f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \rightarrow 0$$

をさだめる事ができる. また res_L により L への制限写像を表すことにすると, 以下の図式がなりたつ:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\text{res}_L) & \longrightarrow & \ker f_d^* & \xrightarrow{\text{res}_L} & \ker \bar{f}_d^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \delta_f & & \downarrow \delta_{\bar{f}} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(f^* \mathcal{N}_{L|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\bar{f}^* \mathcal{N}_{C|L}, \bar{f}^*(\mathcal{O}_L(d))) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & U \otimes_k H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1))) & & & & \end{array}$$

ここで ε の全射であることが示せれば, δ_f と $\delta_{\bar{f}}$ との全射性が同値条件であることがわかる.

さて $h \in \ker(\text{res}_L)$ をとると, これに対し $h_1, \dots, h_m \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1))$ が存在して $h = h_1 \cdot l_1 + \dots + h_m \cdot l_m$ なる形に表されるので, $f^*(l_i) = 0$ より $\varepsilon(h) = f^*(h_1) \cdot dl_1 + \dots + f^*(h_m) \cdot dl_m$ になりたつ. つまり次の可換図式を得られる:

$$\begin{array}{ccc} \ker(\text{res}_L) & \xleftarrow{\quad} & U \otimes_k H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \\ \downarrow \varepsilon & \nearrow 1_U \otimes f_{d-1}^* & \\ U \otimes_k H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))) & & \end{array}$$

いま f_{d-1}^* は全射として居るので, ε の全射なることを得る. □

Remark 3.8. 特に f が条件 (‡) をみたすなら可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) & & \\ \downarrow & \searrow f_{d-1}^* & \\ H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1)) & \xrightarrow{\bar{f}_{d-1}^*} & H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1))) \end{array}$$

により f_{d-1}^* が全射であることから $\bar{f}_{d-1}^*$ の全射となることがわかり, $\bar{f}$ も条件 (‡) をみたすことが示される.

3.2.2 一般の場合

Proposition 3.9. $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ を条件 (‡) を満すものとする. このとき,

$$\left[\binom{n+d}{d} + c(n+1) - n(cd+1) - 2 \right] - \dim(\ker f_d^* \cap \ker D) \geq 0 \quad (3.9.1)$$

であることと δ_f が全射であることは同値になる.

Proof. $D(\ker f_d^*) \subset F^{-1}(\gamma^* \mathbb{H})$ であることに注意する. δ_f が全射であるためには, $\alpha \neq 0 \in \gamma^* \mathbb{H}$ に対し $D(\ker f_d^*) \cap F^{-1}(\langle \alpha \rangle) \neq 0$ であればよい. そこでこの k -linear space の次元を調べることにすると

$$\begin{aligned} F^{-1}(\langle \alpha \rangle) &= 1 + \dim \ker F \\ \dim F^{-1}(\gamma^* \mathbb{H}) &= \dim \mathbb{H} + \dim \ker F \end{aligned}$$

により,

$$\begin{aligned} \dim(D(\ker f_d^*) \cap F^{-1}(\langle \alpha \rangle)) &= \dim D(\ker f_d^*) + \dim F^{-1}(\langle \alpha \rangle) - \dim(D(\ker f_d^*) + F^{-1}(\langle \alpha \rangle)) \\ &\geq \dim D(\ker f_d^*) + \dim F^{-1}(\langle \alpha \rangle) - \dim F^{-1}(\gamma^* \mathbb{H}) \\ &= \dim \ker f_d^* - \dim(\ker f_d^* \cap \ker D) + 1 - \dim \mathbb{H} \end{aligned} \quad (*)$$

と計算できる. $\mathbb{P}^1$ 上の splitting $\mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ をとると, $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(cd - a_i))$ と表せられ $\dim \mathbb{H} = \sum_{i=1}^{n-1} cd - a_i + 1 = (n-1)(cd+1) - (c(n+1)-2)$ となり, 計算を継続すれば

$$\begin{aligned} \dim(D(\ker f_d^*) \cap F^{-1}(\langle \alpha \rangle)) &\geq \left[\binom{n+d}{d} - (cd+1) \right] + 1 - [(n-1)(cd+1) - (c(n+1)-2)] - \dim(\ker f_d^* \cap \ker D) \\ &= \left[\binom{n+d}{d} + c(n+1) - n(cd+1) - 1 \right] - \dim(\ker f_d^* \cap \ker D) \end{aligned} \quad (*)$$

とわかる. それ故に (3.9.1) が成立するなら $\dim(D(\ker f_d^*) \cap F^{-1}(\langle \alpha \rangle)) \geq 1$ であり, δ_f の全射であることがわかる. また δ_f が全射であるとする, $F^{-1}(\gamma^* \mathbb{H}) = D(\ker f_d^*) + F^{-1}(\langle \alpha \rangle)$ となる^{*3} ので, 上の不等式の (*) において等号になりたつことになり, (3.9.1) の成立することがわかる. □

^{*3} 実際, $\forall v \in F^{-1}(\gamma^* \mathbb{H})$ に対し, $\exists w \in D(\ker f_d^*)$ s.t. $F(v) - \alpha = F(w)$, $\beta \in F^{-1}(\alpha)$ として $x = w + \beta - v \in \ker F$ となる. 故に $v = w + (\beta - x) \in D(\ker f_d^*) + F^{-1}(\langle \alpha \rangle)$ となる.

Corollary 3.10. $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ を条件 (‡) を満すものとし, さらに $n \geq c$ であるとする. このとき,

$$\left[\binom{n+d}{d} + n^2(1-d) - 2 \right] - \dim(\ker f_d^* \cap \ker D) \geq 0 \quad (3.10.1)$$

であるなら δ_f は全射となる.

Theorem 3.11. (3.11.a) $n \geq 2, d \geq 3$ に対し, δ_f は全射となる.

(3.11.b) $c = 2$ の場合は $n \geq 2, d \geq 2$ の範囲でも, δ_f は全射となる.

Proof. (i) $c \geq n$ の場合: まづ $p \nmid d$ の場合に対応する (3.10.1) の関数

$$\Phi(n, d) = \binom{n+d}{d} + n^2(1-d) - 2$$

をみる. 差分の作用素の行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta_n & \Delta_n^2 & \Delta_n^3 \\ \Delta_d & \Delta_d \Delta_n & \Delta_d \Delta_n^2 & \\ \Delta_d^2 & \Delta_d^2 \Delta_n & & \end{bmatrix}$ とおくと,

$$(A\Phi)(n, d) = \begin{bmatrix} \binom{n+d}{d} + n^2(1-d) - 2 & \binom{n+d}{d-1} + (2n+1)(1-d) & \binom{n+d}{d-2} + 2(1-d) & \binom{n+d}{d-3} \\ \binom{n+d}{d+1} - n^2 & \binom{n+d}{d} - (2n+1) & \binom{n+d}{d+1} - 2 & \\ \binom{n+d}{d+2} & \binom{n+d}{d+1} & & \end{bmatrix}$$

であり, 特に

$$(A\Phi)(2, 3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & ** \\ 1 & 5 & ** & \\ ** & ** & & \end{bmatrix}$$

である. ここで上記 $(A\Phi)(2, 3)$ の $**$ にあたる部分は, $n \geq 2, d \geq 3$ に対しつねに 0 より大きいので, この範囲の n, d について $\Phi(n, d) \geq 0$ が示される.

つぎに (3.5) より $\left[\binom{n+d}{d} + n^2(1-d) - 2 \right] - \dim(\ker f_d^* \cap \ker D) \geq \left[\binom{n+d}{d} + n^2(1-d) - 2 \right] - \left[\binom{n+p^{-1} \cdot d}{p^{-1} \cdot d} - (n \cdot p^{-1} \cdot d + 1) \right]$ であるので $e = p^{-1} \cdot d$ とおき, $p \mid d$ の場合に対応する関数を

$$\Psi(p, n, e) = \Psi_p(n, e) = \left[\binom{n+pe}{pe} + n^2(1-pe) - 2 \right] - \left[\binom{n+e}{e} - (ne+1) \right]$$

とさだめる. このとき $\Psi_p(n, e) = \binom{n+pe}{pe}$ とおくと,

$$(A\Psi_p)(n, e) = (A\Psi_p)(n, e) +$$

$$\begin{bmatrix} n^2(1-pe) + (ne+1) - \binom{n+e}{e} - 2 & (2n+1)(1-pe) + e - \binom{n+e}{e-1} & 2(1-pe) - \binom{n+e}{e-2} & -\binom{n+e}{e-3} \\ -pn^2 + n - \binom{n+e}{e+1} & -p(2n+1) + 1 - \binom{n+e}{e} & -2p - \binom{n+e}{e+1} & \\ -\binom{n+e}{e+2} & -\binom{n+e}{e+1} & & \end{bmatrix}$$

となる. 一方で $(\Delta_p \Psi)(p, n, e) = \binom{n+(p+1)e}{(p+1)e} - \binom{n+pe}{pe} - n^2e$ に対し, $-n^2e$ の項が生き残る作用素の行列 $B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta_n & \Delta_n^2 \\ \Delta_e & \Delta_n \Delta_e & \Delta_n^2 \Delta_e \end{bmatrix} \text{ をとると, } (B\Delta_p \Psi)(2, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \text{ と計算される. また } B \text{ 以外に対応する作用素}$$

については, つねに 0 以上の値をとるので, $p \geq 2, n \geq 1, e \geq 1$ の範囲で $\Psi(p+1, n, e) \geq \Psi(p, n, e)$ であることがわかる. ここで

$$(A\Psi_3)(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ** \\ 0 & 5 & ** & \\ ** & ** & & \end{bmatrix} \quad (A\Psi_2)(1, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & ** \\ 0 & 3 & ** & \\ ** & ** & & \end{bmatrix}$$

である. これより, $n \geq 1, e \geq 1$ ($n \geq 1, e \geq 2$) の範囲で $**$ の部分はつねに 0 以上の数をとるから, $\Psi_3 \geq 0$ ($\Psi_2 \geq 0$) となり, それ故に $p \geq 3$ ($p \geq 2$) なら $\Psi_p(n, e) \geq 0$ となることがわかる.

以上まとめると,

$$(n, d) \quad \Phi(n, d) \geq 0 \quad \text{if } n \geq 2, d \geq 3, \quad (3.11.1)$$

$$(n, pe) \quad \Psi_p(n, e) \geq 0 \quad \text{if } p \geq 3, n \geq 1, e \geq 1, \quad (3.11.2)$$

$$(n, pe) \quad \Psi_p(n, e) \geq 0 \quad \text{if } p \geq 2, n \geq 1, e \geq 2 \quad (3.11.3)$$

であるので, $n \geq 2, d \geq 3$ であるなら δ_f の全射なることが示される. 実際, $p \nmid d$ なら (3.11.1) より o.k. で, また $p \mid d$ かつ $p \geq 3$ なら $e = p^{-1}d \geq 1$ なので (3.11.2) により良く, $2 \mid d$ の時は $e = 2^{-1}d \geq 2$ なので (3.11.3) により良いことがわかる.

またつけ足して $n = 2, d = 2$ の時は, $p \neq 2$ なら $\Phi(2, 2) = 0$ であることから, $p = 2$ なら $\Psi(2, 1) = 0$ であることから, δ_f が全射とわかる.

(ii) $n > c$ の場合: $L^m = \langle C \rangle$ とおけば $m = \dim L$ について $2 \leq m \leq c$ であり, ここで (3.7) により $\tilde{f}: \mathbb{P}^1 \rightarrow L$ に関する $\delta_{\tilde{f}}$ が全射であればよいことがわかる. それ故この場合も (i) に帰着される. $\square$

3.2.3 f を Veronese embedding とする場合

$n = c$ として $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^c$ の c 次 Veronese embedding とする場合には (3.11) をことなる方法で示することができる (最終的には (3.14) および (3.16) による). § 4.5 における議論と同様に標準的な写像

$$f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^c; (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (t^c, t^{c-1}u, \dots, u^c)$$

を取り, 対応する有理曲線を C とおく. このとき ideal $I_C \subset k[t, u]$ は $\{x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}\}_{0 \leq i \leq j \leq n-1}$ なる 2 次式により生成されることになる. そこで, $d = 2$ の場合の (3.1.3) をみると以下の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta_f^{(2)} & \rightarrow & \mathbb{H}^{(2)} = U \otimes_k H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))) \\ & \nearrow & & & \downarrow \gamma^* \\ \ker f_2^* & \subset & H^0(\mathbb{P}^c, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(2)) & & \mathcal{V} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(1)), f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(2))) \\ & \searrow & \downarrow D & & \parallel \\ & & \mathcal{V} \otimes_k H^0(\mathbb{P}^c, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(1)) & \xrightarrow[F^{(1)}]{\simeq} & \mathcal{V} \otimes_k H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(1))) \end{array}$$

ただし, U は (4.18) の議論における $c-1$ 次の k -linear space とした.

Remark 3.12. (3.12.a) $F^{(1)}$ は同型となる.

(3.12.b) (3.5) によると D は $\ker f_2^*$ の上で標数によらず単射となるので, $\delta_f^{(2)}$ も単射となることがわかる.

(3.12.c) $\dim \ker f_2^* = \frac{c(c-1)}{2}$, $\dim \mathbb{H}^{(2)} = (c-1)^2$ である.

つぎに $d > 2$ に対しては, C が 2 次式で生成されることと (3.6) とにより以下の図式が可換となる

$$\begin{array}{ccc} \ker f_2^* \otimes H^0(\mathbb{P}^c, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(d-2)) & \xrightarrow{\delta_f^{(2)} \otimes f_{d-2}^*} & \mathbb{H}^{(2)} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(d-2))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker f_d^* & \xrightarrow{\delta_f^{(d)}} & \mathbb{H}^{(d)} \end{array}$$

それ故につぎを得られる:

Lemma 3.13. $\delta_f^{(d)}$ が全射であるためには, $\delta_d^{(2)}(\ker f_2^*) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(d-2))) = \mathbb{H}^{(d)}$ であることが必要充分である.

Corollary 3.14. $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^c$ を c 次 Veronese embedding とし, また $c = 2$ であるとする. このとき $\delta_f^{(2)}$ は全射で, それ故すべての $d \geq 2$ に対し, $\delta_f^{(d)}$ は全射となる.

Proof. $\dim \ker f_2^* = \dim \mathbb{H}^{(2)} = 1$ であるので. □

さらに詳細な計算にすすむ. C の ideal の生成元 $x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}$ の δ_f のよる行き先を記述する事としよう.

Lemma 3.15. $0 \leq i \leq j \leq n-1$ に対し, $\delta_f(x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}) = -(t^{c-j-1} u^{j-1} \xi_i + t^{c-j} u^{j-2} \xi_{i+1} + \cdots + t^{c-i-1} u^{i-1} \xi_j)$ なる等式がなりたつ.

Proof. (4.18) により $\gamma^*(\xi_i) = u^2 e_{i-1} - 2t u e_i + t^2 e_{i+1} = u(ue_{i-1} - te_i) - t(ue_i - te_{i+1})$ と書けるので, $a \geq 0$ に対して

$$\gamma^*(u^a \xi_i + t u^{a-1} \xi_{i+1} + \cdots + t^a \xi_{i+a}) = u^{a+1}(ue_{i-1} - te_i) - t^{a+1}(ue_{i+a} - te_{i+a+1})$$

となる. $a = j - i$ を代入すれば

$$\gamma^*(u^{j-i} \xi_i + t u^{j-i-1} \xi_{i+1} + \cdots + t^{j-i} \xi_j) = u^{j-i+1}(ue_{i-1} - te_i) - t^{j-i+1}(ue_j - te_{j+1})$$

を得る. ここで $x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j$ の $(F \circ D)$ の送りさを計算すると,

$$\begin{aligned} (F \circ D)(x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}) &= F((x_i e_j + x_j e_i) - (x_{i-1} e_{j+1} + x_{j+1} e_{i-1})) \\ &= (t^{c-i} u^i e_j + t^{c-j} u^j e_i) - (t^{c-i+1} u^{i-1} e_{j+1} + t^{c-j-1} u^{j+1} e_{i-1}) \\ &= -t^{c-j-1} u^j (ue_{i-1} - te_i) + t^{c-i} u^{i-1} (ue_j - te_{j+1}) \\ &= -t^{c-j-1} u^{i-1} (u^{j-i+1} (ue_{i-1} - te_i) - t^{j-i+1} (ue_j - te_{j+1})) \end{aligned}$$

となるので, $(F \circ D)(x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}) = \gamma^*(-t^{c-j-1} u^{i-1} (u^{j-i} \xi_i + t u^{j-i-1} \xi_{i+1} + \cdots + t^{j-i} \xi_j))$ であることがわかる. □

Proposition 3.16. $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \otimes \delta_f(\ker f_2^*) = H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)).$

Proof. $\delta_f(x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1})$ はつぎの行列で表示できる:

$$\begin{aligned} M(\delta) &= -[\delta_f(x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1})]_{1 \leq i, j \leq c-1} \\ &= \begin{bmatrix} t^{c-2} \xi_1 & t^{c-3} u \xi_1 + t^{c-2} \xi_2 & t^{c-4} u^2 \xi_1 + t^{c-3} u \xi_2 + t^{c-2} \xi_3 & \cdots & u^{c-2} \xi_1 + t u^{c-3} \xi_2 + \cdots + t^{c-2} \xi_{c-1} \\ * & t^{c-3} u \xi_2 & t^{c-4} u^2 \xi_2 + t^{c-3} u \xi_3 & \cdots & u^{c-2} \xi_2 + t u^{c-3} \xi_3 + \cdots + t^{c-3} u \xi_{c-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & * & u^{c-2} \xi_{c-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これを観察すれば $1 \leq i \leq c-1, 1 \leq j \leq c-2, i \leq j$ に対して,

$$\begin{aligned} tM(\delta)_{i,j+1} - uM(\delta)_{i,j} &= t(t^{c-j-2} u^j \xi_i + t^{c-j-1} u^{j-1} \xi_{i+1} + \cdots + t^{c-i-1} u^{i-1} \xi_{j+1}) \\ &\quad - u(t^{c-j-1} u^{j-1} \xi_i + t^{c-j} u^{j-2} \xi_{i+1} + \cdots + t^{c-i-1} u^{i-1} \xi_j) = t^{c-i} u^{i-1} \xi_{j+1} \end{aligned}$$

を得られ, また $1 \leq i \leq c-2, 1 \leq j \leq c-1, i < j$ に対して,

$$\begin{aligned} uM(\delta)_{i,j} - tM(\delta)_{i+1,j} &= u(t^{c-j-1} u^{j-1} \xi_i + t^{c-j} u^{j-2} \xi_{i+1} + \cdots + t^{c-i-1} u^{i-1} \xi_j) \\ &\quad - t(t^{c-j-1} u^{j-1} \xi_{i+1} + t^{c-j} u^{j-2} \xi_{i+2} + \cdots + t^{c-i-2} u^i \xi_j) = t^{c-j-1} u^j \xi_i \end{aligned}$$

を得られる. つまり, 各 $1 \leq i \leq c-1$ に対して $j \neq i-1, i$ なる $t^{c-j-1} u^j \xi_i$ を生成できることはわかる. 一方 $t^{c-i-1} u^i \xi_i = u(t^{c-i-1} u^{i-1} \xi_i)$, $t^{c-i} u^{i-1} \xi_i = t(t^{c-i-1} u^{i-1} \xi_i)$ であるので, 合せて $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \otimes \delta_f(\ker f_2^*) = H^0(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ となることが示される. □

4 Appendix

4.1 $\mathcal{M}_{\mathbb{G}}$ の構成方法

Definition 4.1. $0 < r < n$, $0 < c$ として $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, $W = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ とおく. このとき $c' \leq \min\left\{\binom{c+r}{r} - 1, n\right\}$ に対し, $\mathbb{G} = \mathbb{G}(c', \mathbb{P}^n)$, $V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathcal{Q}$, $\Phi := \mathcal{H}om(\mathcal{Q}, S^c W \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{G}})$ とおき, さらに $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{G}} := \mathbb{P}(\Phi^\vee)$ とさだめると, $\Phi \rightarrow \text{Hom}(V, S^c W) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$ なる morphism of sheaves on $\mathbb{G}$ により写像

$$\bar{q}: \overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{G}} \rightarrow \overline{\text{Mor}}_c(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$$

が導かれる. ここで, $\mathcal{M}_{\mathbb{G}} := \bar{q}^{-1}(\text{Mor}_c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n))$ なる quasi-projective variety of dimension $(c' + 1)(n - c') + (c' + 1)\binom{c+r}{r} - 1$ を定義すると, つぎの図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{G}} & \xrightarrow{q} & \text{Mor}_c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n) \\ \downarrow \pi_{\mathbb{G}} & & \\ \mathbb{G} & & \end{array}$$

$\mathcal{M}_{\mathbb{G}}$ は各 $L \in \mathbb{G}$ に対し, $\pi_{\mathbb{G}}^{-1}(L) = \{f \in \text{Mor}_c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^n) \mid f(\mathbb{P}^1) \subset L\}$ となるものである. 以後, $\mathcal{M}_{\mathbb{G}}$ の各元 F を $f = q(F)$, $L = \pi_{\mathbb{G}}(F)$ により $F = (f, L)$ と表記することとする.

4.2 超曲面により定まる射 $D(h)$ の構造

$X = Z(h) \subset \mathbb{P}^n$ を d 次超曲面とする. このとき X 上の right exact sequence

$$\mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}^\vee = \mathcal{O}_X(-d) \xrightarrow{\vee} \Omega_{\mathbb{P}^n}|_X \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0,$$

がさだまる. またさらに次がわかる:

Lemma 4.2 (cf. [Hartshorne, 1977, II, thm 8.13]). $\mathcal{V} = k \cdot dz_0 + \cdots + k \cdot dz_n$ なる k -vector space をとるとき, $\mathbb{P}^n$ 上の exact sequence

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\mu} \mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0.$$

がさだまる. ここで μ は標準的な open covering $U_i = \{z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ の上において $\mu\left(d\left(\frac{z_j}{z_i}\right)\right) = \frac{dz_j \otimes z_i - dz_i \otimes z_j}{z_i^2}$ により定まる射であり, また σ は $\sigma(1): \mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1); dz_i \otimes 1 \mapsto z_i$ により定まる射である.

Proposition 4.3. $D(h) = \mu|_X \circ \nu: \mathcal{N}_{X|\mathbb{P}^n}^\vee \rightarrow \mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X(-1)$ は $1 \mapsto \sum_{j=0}^n dz_j \otimes \frac{\partial h}{\partial z_j}$ により定まる射となる.

Proof. 標準的な open covering $U_i = \{z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$, $\rho_i: U_i \simeq \text{Spec } k\left[\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right]$, をとり, $h_i := \frac{h}{z_i^d}$ とおくことにする. このとき以下の図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X_i, \mathcal{O}_X(-d)) & \xrightarrow{\nu_i} & H^0(U_i, \Omega_{\mathbb{P}^n}) & \xrightarrow{\mu|_{X_i}} & \mathcal{V} \otimes_k H^0(X_i, \mathcal{O}_X(-1)) \\ \downarrow z_i^d & & \downarrow & \nearrow \varphi_i & \\ k\left[\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right] & \xrightarrow{d(h_i)} & k \cdot d\left(\frac{z_0}{z_i}\right) + \cdots + k \cdot d\left(\frac{z_n}{z_i}\right) & & \end{array}$$

ただし $\varphi_i\left(d\left(\frac{z_j}{z_i}\right)\right) = \frac{z_i dz_j - z_j dz_i}{z_i^2}$, $d(h_i) = \sum \frac{\partial h_i}{\partial\left(\frac{z_j}{z_i}\right)} d\left(\frac{z_j}{z_i}\right)$ とおいた. これによりて計算すれば

$$\begin{aligned} (\mu|_{X_i} \circ \nu_i)\left(\frac{1}{z_i^d}\right) &= \varphi_i(d(h_i)) = \sum \frac{\partial h_i}{\partial\left(\frac{z_j}{z_i}\right)} \frac{z_i dz_j - z_j dz_i}{z_i^2} \\ &= \frac{1}{z_i^{d+1}} \sum_{j \neq i} \frac{\partial h}{\partial z_j} (z_i dz_j - z_j dz_i) = \frac{1}{z_i^{d+1}} \left(\sum_{j \neq i} \frac{\partial h}{\partial z_j} z_i dz_j - dz_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial h}{\partial z_j} z_j \right) = \frac{1}{z_i^d} \sum_{j=0}^n \frac{\partial h}{\partial z_j} dz_j \end{aligned}$$

となるので命題の成立することがわかる. $\square$

4.3 Normal bundle の splitting に関して

$f \in \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ とし, $f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ により $\mathbb{P}^1$ 上での splitting を表す. このとき $\max a_i$ はいかなる値で抑えることができるか. $n \leq c$ として議論すれば充分なのでその様にし, また $a_1 = \max a_i$ としておく.

Remark 4.4. $\sum a_i = c(n+1) - 2$ であることはわかる. また $c = 2, 3$ については $\max a_i = c + 2$ となる (§ 4.5).

さて, $\mathcal{P}$ を $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ に関する 1 次の principal part とすると,

$$0 \rightarrow f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}^\vee \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c - a_i) \rightarrow \mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0$$

なる $\mathbb{P}^1$ の上の完全列を得る.

Lemma 4.5. $\min a_i \geq c$

Proof. $H^0(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^n}^\vee \otimes_k \mathcal{O}(c-1)) \hookrightarrow H^0(\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}(-1)) = 0$ により $-a_i + c - 1 \leq -1$ なので. $\square$

Lemma 4.6. $\max a_i \leq 3c - 2$

Proof. $a_2 = \dots = a_{n-1} = c$ として計算してみると, $a_0 = [c(n+1) - 2] - c(n-2) = 3c - 2$ となるので. $\square$

4.4 f_d^* の全射性に関して

4.4.1 smoothness との関連

Lemma 4.7. $C \subset \mathbb{P}^n$: rational curve of degree c とする. このとき, C が smooth であることと, C の Hilbert polynomial が $P_C(t) = ct + 1$ と表されることは同値である.

4.4.2 $d \gg 0$

$f \in \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ をとり, $C \subset \mathbb{P}^n$ をそれに対応する smooth rational curve of degree c とする. また 1 次式 $x \in k[z]_1$ により決まる hyperplane $Z(x) \subset \mathbb{P}^n$ に対して, $B = Z(x) \cap C = \{P_1, \dots, P_c\}$ を重複度をこめた c 個の点のなす scheme であるとする (重複するときは $P_i = P_{i+1}$ の様にする).

f に対応する環の射 $\varphi : k[z] \rightarrow k[t, u]^{(c)}$ について $S(C) = \text{im } \varphi \subset k[t, u]^{(c)}$ で, さらに $\xi = \varphi(x) \in S(C)$ とおけば $S(B) = S(C)/\xi \cdot S(C)$ であり, また $0 \rightarrow S(C)_{d-1} \xrightarrow{\xi} S(C)_d \rightarrow S(B)_d \rightarrow 0$ なる k -linear space の完全列により

$$\dim S(B)_d = \dim S(C)_d - \dim S(C)_{d-1}$$

が成立する. ここで $F : S(B) \rightarrow (k[t, u]/\xi \cdot k[t, u])^{(c)}$ をとり, $\overline{S(B)} := \text{im } F = S(C)/S(C) \cap \xi \cdot k[t, u] \subset (k[t, u]/\xi \cdot k[t, u])^{(c)}$ とおくと, これに対して

$$\dim S(B)_d - \overline{S(B)}_d = \dim(S(C) \cap \xi \cdot k[t, u])_d - \dim(\xi \cdot S(C))_d \quad (4.7.1)$$

なる等号がなりたつ.

Example 4.8. $S(B) \neq \overline{S(B)}$ の例: $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3; (t, u) \mapsto (t^4, t^3u, tu^3, u^4)$ をとり $x = z_0$ とすると, $S(C) = k[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$ であり $S(B) = S(C)/t^4 \cdot S(C)$ であるので, 2 次の斉次式をみれば

$$S(B)_2 = \langle t^6u, t^3u^5, t^2u^6, t^1u^7, u^8 \rangle \neq \overline{S(B)}_2 = \langle t^3u^5, t^2u^6, t^1u^7, u^8 \rangle$$

とわかる.

Lemma 4.9. $d \geq 1$ に対し $\dim \overline{S(B)}_d$ は d についての単調増加な関数で, また $\dim \overline{S(B)}_d \geq \min\{d+1, c\}$ であり, さらに $d \geq c-1$ であるなら $\dim \overline{S(B)}_d = c$ である.

Proof. $p_i \in C$ に対応する $k[t, u]$ の一次式を l_i とし, おなじく対応する $S(C)$ の homogeneous ideal を $J_i = I_{p_i} = S(C) \cap (l_i)$ とし, また $J_{i_1, \dots, i_s} = S(C) \cap (l_{i_1}, \dots, l_{i_s})$ とおく. このとき $\overline{S(B)} = S(C)/J_{1, \dots, c}$ となる. さて,

$$(l_1 \cdots l_c) \subsetneq \cdots \subsetneq (l_1 l_2 l_3) \subsetneq (l_1 l_2) \subsetneq (l_1) \subsetneq k[t, u]$$

$$J_{1, \dots, c} \subsetneq \cdots \subsetneq J_{1, 2, 3} \subsetneq J_{1, 2} \subsetneq J_1 \subsetneq S(C)$$

なる ideal の列に対し

$$T_d^1 = (S(C)/J_1)_d \simeq (k[t, u]/l_1)_{cd} \simeq k$$

$$T_d^2 = (J_1/J_{1, 2})_d \hookrightarrow ((l_1)/(l_1 l_2))_{cd} \xleftarrow{\simeq} (k[t, u]/l_2)_{cd-1} \simeq k$$

$$T_d^3 = (J_{1, 2}/J_{1, 2, 3})_d \hookrightarrow ((l_1 l_2)/(l_1 l_2 l_3))_{cd} \xleftarrow{\simeq} (k[t, u]/l_3)_{cd-2} \simeq k$$

$$\vdots$$

$$T_d^c = (J_{1, \dots, c-1}/J_{1, \dots, c})_d \hookrightarrow ((l_1 \cdots l_{c-1})/(l_1 \cdots l_{c-1} l_c))_{cd} \xleftarrow{\simeq} (k[t, u]/l_c)_{cd-c+1} \simeq k$$

なる関係が成立し, またここで $\dim \overline{S(B)}_d = \dim T_d^1 + \cdots + \dim T_d^c$ であることがわかる. $1 \leq s \leq c$ について $\dim T_d^s = 0$ or 1 であり, 特に $d \geq s-1$ なるものについては $\dim T_d^s = 1$ となる: 実際, $1 \leq i \leq s-1$ に対し

$$\begin{cases} \eta_i \in (J_i \setminus J_s)_1 & \text{if } P_i \neq P_s \\ \eta_i \in (J_s \setminus (S(C) \cap (l_s^2)))_1 & \text{if } P_i = P_s \end{cases}$$

および $\zeta \in (S(C) \setminus J_s)_1$ をとれば, $\zeta^{d-s+1} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdots \eta_{s-1} \in (J_{1, \dots, s-1})_d \setminus (J_{1, \dots, s})_d$ の成立して居ることがわかるので. $\square$

Question 4.10. $d \geq c-1$ のときに f_d^* の全射でないことはあるのか?

Proposition 4.11. ある d_0 について $S(C)_{d_0} = k[t, u]_{d_0}$ であるなら, $d \geq d_0$ に対して $S(C)_d = k[t, u]_d$ が成立する.

Proof. $(\xi \cdot S(C))_{d_0+1} = \xi \cdot S(C)_{d_0} = \xi \cdot k[t, u]_{d_0}$ なので d_0+1 に関し, 式 (4.7.1) は 0 となる. 故に $S(B)_{d_0+1} = \overline{S(B)}_{d_0+1}$ となることがわかる. また一方で (4.9) の証明中の ideal $J_{1, 2, \dots, s}$ らについて, d_0 において k -linear space の真の増大列

$$(J_{1, \dots, c})_{d_0} \subsetneq \cdots \subsetneq (J_{1, 2, 3})_{d_0} \subsetneq (J_{1, 2})_{d_0} \subsetneq (J_1)_{d_0} \subsetneq S(C)_{d_0}$$

を得られるので, $\dim \overline{S(B)}_{d_0} = c$ であり, (4.9) により $\dim S(B)_{d_0+1} = c$ で, 結局 $\dim S(C)_{d_0+1} = \dim S(C)_{d_0+1} + \dim \dim S(B)_{d_0+1} = (c+1)d+1$ とわかる. あとは帰納的に示される. $\square$

Corollary 4.12. $d \gg 0$ に対して $\text{Mor}_c^{(d)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ となる.

Proof. (4.11) から $\text{Mor}_c^{(1)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) \subset \text{Mor}_c^{(2)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) \subset \cdots \subset \text{Mor}_c^{(d)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) \subset \cdots$ なる増大列を得られ, Noether 性からこれはある d_0 で止まることになるが, 一方 $\bigcup_{d \in \mathbb{N}} \text{Mor}_c^{(d)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ であるので, $\text{Mor}_c^{(d_0)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ が示される. $\square$

Remark 4.13. $c = 1, 2, 3$ のときは常に $\text{Mor}_c^{(d)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ である.

Lemma 4.14. $c = 4$ のとき, $d \geq 2$ であるなら, 等号 $\text{Mor}_c^{(d)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \text{Mor}_c^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ が成立する.

Proof. $f \in \text{Mor}_4^{\text{imm}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ をとり, 対応する有理曲線を $C \subset \mathbb{P}^n$ とし, またそれがはる linear subspace を $L = \langle C \rangle$ と表す. $\dim L = 4$ であるときには f_1^* が全射となりよいので, $\dim L = 3$ の場合をみる. このとき $\tilde{f}: \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset L \simeq \mathbb{P}^3$ に対応する k -linear map $\varphi = \tilde{f}_3^*: H^0(L, \mathcal{O}_L(2)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8))$ について全射が示せばよい. ここで $\dim \ker(\varphi) \geq \dim H^0(L, \mathcal{O}_L(2)) - \dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8)) = 10 - 9 = 1$ と計算されるが, もし $\dim H^0(L, \mathcal{O}_L(2)) > 1$ であるなら $\mathbb{P}^3 (= L)$ のことなる二次超曲面 $Q_1 \neq Q_2 \subset \mathbb{P}^3$ により, $C = Q_1 \cap Q_2$ と C は complete intersection として書き表されることになる. しかしこれは C が smooth rational curve であることに矛盾する. 結果, $\dim \ker(\varphi) = 1$ であるので φ 全射とわかる. $\square$

4.4.3 例

Lemma 4.15. $c \geq 2$ なる整数に対して

$$\{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot (c-1) + a_4 \cdot c \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = c-2, a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{0, \dots, c(c-2)\}$$

が成立する.

Proof. $0 \leq m \leq c(c-2)$ を $0 \leq i, j \leq c-2$ により $m = m_{i,j} = i \cdot (c-1) + j$ と表すことにする. これはつぎの様な図に対応する:

$$[m_{i,j}]_{0 \leq i, j \leq c-2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & c-3 & c-2 \\ c-1 & c & \cdots & 2c-4 & 2c-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (c-2)(c-1) & (c-2)(c-1)+1 & \cdots & (c-2)c-1 & (c-2)c \end{bmatrix}$$

このとき $i \leq j$ であれば $m = (c-2-j) \cdot 0 + (j-i) \cdot 1 + i \cdot c$ とかけて, また同様に $j \leq i$ であれば $m = (c-2-i) \cdot 0 + (i-j) \cdot (c-1) + j \cdot c$ とかくことができる. $\square$

Corollary 4.16. $J_i = (t^i) \cap S(C)$ とおき, ある s に対し $(J_{sc})_s \subsetneq (J_{sc-1})_s \subsetneq (J_{sc-2})_s, (J_2)_s \subsetneq (J_1)_s \subsetneq S(C)_s$ となるとする. このとき $S(C)_{sc-2} = k[t, u]_{sc(sc-2)}$ が成立する.

Example 4.17. $S(C) = k[t^c, t^{c-1}u, tu^{c-1}, u^c]$ ならば $S(C)_{c-2} = k[t, u]_{(c-2)c}$ となる.

4.5 Veronese embedding の Normal bundle に関して

$\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^c$ への c 次 Veronese embedding により定まる有理曲線を C とする. 座標を選ぶことで,

$$f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^c; (t, u) \mapsto (f_1, \dots, f_n) = (t^c, t^{c-1}u, \dots, u^c)$$

なる写像により $C = f(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^c$ と見ることができる. ここで $\mathcal{P}^1$ を $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c)$ の一次の principal part, $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^c}(1))$ を次数 1 の基底 $e_0, \dots, e_c$ による k -vector space とすると, つぎの図式を得られる:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & (f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^c}^\vee)(c) & \xlongequal{\quad} & (f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^c}^\vee)(c) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow g & & \\
0 & \longrightarrow & (f^* \Omega_{\mathbb{P}^c}^1)(c) & \longrightarrow & V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow a^1 & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(c) & \longrightarrow & \mathcal{P}^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

さて $S = S(\mathbb{P}^1) = k[t, u]$ とする. このとき以下の命題により, g を S の斉次多項式の行列として表すことができる.

Proposition 4.18. $U = k\xi_1 + \cdots + k\xi_{c-1}$ なる k -vector space により $(f^* \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}^c}^\vee)(c) = U \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ とかけて, さらに g を

$$G = \begin{bmatrix} u^2 & -2tu & t^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u^2 & -2tu & t^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u^2 & -2tu & t^2 \end{bmatrix} \in M(n+1, n-1; S_2)$$

なる行列により $g(2): U \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2); (\xi_1 \dots \xi_{c-1}) \mapsto (e_0 \dots e_c)^t G$ と表すことができる.

Proof. まづ $p \nmid c$ であるなら $\mathcal{P}^1$ は $\mathcal{O}(c-1)\eta_0 + \mathcal{O}(c-1)\eta_1$ と書いて, また $a^1(e_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}, \frac{\partial f_i}{\partial u}\right)$ となる ([Kaji, 1985, 1.2.a]). 故につぎの $c-1$ 次の斉次多項式の行列

$$H = \begin{bmatrix} ct^{c-1} & (c-1)t^{c-2}u & (c-2)t^{c-3}u^2 & (c-3)t^{c-4}u^3 & \cdots & u^{c-1} & 0 \\ 0 & t^{c-1} & 2t^{c-2}u & 3t^{c-3}u^2 & \cdots & (c-1)tu^{c-2} & cu^{c-1} \end{bmatrix}$$

により $a^1: V \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{P}^1; (e_0 \dots e_c) \mapsto (\eta_0 \ \eta_1) H$ と表すことができる. ここで $W = \langle (e_0 \dots e_c)^t G \rangle \subset V \otimes_k H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ とすると $W \subset \ker H^0(a^1(2))$ であるが, k -vector space としての次元を比較すると $W = \ker H^0(a^1(2))$ であることがわかり, 命題の成立することが示される.

つぎに $p \mid c$ であるとする, $\mathcal{P}^1$ の splitting は $\mathcal{O}(c) \oplus \mathcal{O}(c-2)$ となり, $a^1(e_i) = \left(f_i, u^{-1} \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$ となる ([Kaji, 1985, 1.2.b]). これにより a^1 は

$$H = \begin{bmatrix} t^c & t^{c-1}u & t^{c-2}u^2 & t^{c-3}u^3 & \cdots & tu^{c-1} & u^c \\ 0 & (c-1)t^{c-2} & (c-2)t^{c-3}u & (c-3)t^{c-4}u^2 & \cdots & u^{c-2} & 0 \end{bmatrix}$$

と行列表示され, このときも $p \nmid c$ の場合と同様の議論で命題を示すことができる. □

参考文献

- W. Barth and A. Van de Ven. Fano varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. Math. (Basel)*, 31(1):96–104, 1978/79. ISSN 0003-889X.
- J. Harris, M. Roth, and J. Starr. Rational curves on hypersurfaces of low degree. *J. Reine Angew. Math.*, 571:73–106, 2004. ISSN 0075-4102.

- R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. ISBN 0-387-90244-9. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- H. Kaji. On the normal bundles of rational space curves. *Math. Ann.*, 273(1):163–176, 1985. ISSN 0025-5831.
- J. Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. ISBN 3-540-60168-6.