

CYCLIC COVERS ON RULED SURFACE AND REID CONJECTURE

62M037-1 若林直樹（楫研究室）

1. INTRODUCTION

Y を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の nonsingular irreducible surface とし、その $d(\geq 2)$ 次 (branched) cyclic cover

$$f_d : X_d = \mathbf{Spec}\left(\bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_Y(-iD)\right) \longrightarrow Y$$

として得られる nonsingular irreducible surface X_d を考える。このとき X_d がどのような曲面になるかということは非常に興味深い問題である。

そこで $B_d \sim dD$ を f_d の branch divisor とすると、次の結果を得る。

Proposition 2.13

- (1) $p_n(X_d) = \sum_{i=0}^{d-1} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D) - iD))$
- (2) $p_g(X_d) = \frac{1}{12}(d-1)(2D^2d^2 + (3K_Y - D)Dd + 12 - 12q(Y)) + dp_g(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$
- (3) $q(X_d) = q(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$
- (4) $K_Y^2 = d(K_Y + (d-1)D)^2$
- (5) $\kappa(X_d) \geq 0$ のとき、次の条件は同値となる。
 - (a) $K_Y + (d-1)D$ は numerically effective
 - (b) X_d は minimal。

特に、 Y が genus g の nonsingular irreducible curve C 上における invertible sheaf の直和によって定められた decomposable ruled surface

$$p : Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e})) \longrightarrow C$$

($\mathfrak{e}$ は C 上の divisor で $\deg_C \mathfrak{e} \leq 0$) の時、 X_d はどのような曲面になるかを考える。 $D \equiv aC_0 + bF$ としたとき、 g, e, a, b, d の値により X_d を分類すると **Theorem 4.5** を得る。

次に、上記の応用として、 (Y, D) を固定し、十分大きい全ての d に対し nonsingular な Y 上の d 次 (branched) cyclic cover X_d を取る場合を考えると、次の結果を得る。

Theorem 5.7

十分大きい全ての d に対して (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が取得でき、さらに任意の自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対し

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0, \quad D^2 > 0$$

となるとき X_d の minimal model を $\overline{X_d}$ とすると、 $d \geq N$ ならば $K_{\overline{X_d}}^2 \geq 4p_g(\overline{X_d}) - 12$ となる自然数 N が存在する。

このことから $d \geq N$ のとき、canonical かつ $\kappa(\overline{X_d}) = 2$ となる $\overline{X_d}$ に対して Read 予想 (5.6) は正しいことが示される。特に Y が rational ruled surface のときは $N = 9$ 、さらに X_d が minimal な場合には $N = 6$ とできる (5.8), (5.9)。

以降、基礎体は全て $\mathbb{C}$ とし、記号は以下の通り定める (S は nonsingular irreducible surface、 D は S 上の divisor)。

- $h^i(S, \mathcal{O}_S(D)) := \dim_{\mathbb{C}} H^i(S, \mathcal{O}_S(D))$
- K_S : S の canonical divisor (即ち $\mathcal{O}_S(K_S) \cong \omega_S = \wedge^2 \Omega_S$)
- $p_g(S) := h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \cdots S$ の geometric genus
- $p_n(S) := h^0(S, \mathcal{O}_S(nK_S)) \cdots S$ の pluri-genus
- $q(S) := h^1(S, \mathcal{O}_S) \cdots S$ の irregularity
- $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$: nonsingular irreducible curve C 上の rank2 locally free sheaf $\mathcal{E}$ が定める ruled surface
- p : $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ から C への projection
- $\mathbb{F}_e := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))$ rational ruled surface
- $\kappa(S)$: S の小平次元
- $\sim$: linearly equivalent
- $\equiv$: numerically equivalent
- $\text{Cl}(S)$: S の divisor class group
- $\text{Num}(S)$: S の numerically equivalent class group
- $|D|$: (D の定める) complete linear system
- $e := -\deg_C(\wedge^2 \mathcal{E})$: ruled surface $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ の e-invariant
- C_0 : ruled surface $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ の minimal section ($C_0^2 = -e$)
- F : ruled surface $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ における projection p の fiber

2. CYCLIC COVERS ON ALGEBRAIC SURFACE

始めに cyclic cover について、定義及び基本的な結果を述べる。

Proposition 2.1. Y を nonsingular irreducible surface とし、 D を Y 上の divisor、 d を 2 以上の自然数とする。 $dD \sim 0$ 、 $|dD| \neq \emptyset$ のとき、 $B_d \in |dD|$ とすると、locally free $\mathcal{O}_Y$ -module $\bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_Y(-iD)$ に対して、自然に $\mathcal{O}_Y$ -algebra の構造が入る。そこで

$$X_d := \text{Spec}\left(\bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_Y(-iD)\right) \xrightarrow{f_d} Y$$

とすると、 f_d は丁度 B_d 上で branch する次数 d の flat finite morphism となる。このとき X_d 及び f_d に対して以下の事が成り立つ。

- (1) $f_{d*} \mathcal{O}_{X_d} \cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_Y(-iD)$
- (2) $K_{X_d} \sim f_d^*(K_Y + (d-1)D)$ (ramification formula)
- (3) B_d が nonsingular irreducible curve のとき、かつそのときに限り X_d は nonsingular irreducible surface。

Proof. [3] I. Lemma 17.1 による。 □

Definition 2.2. (2.1) で B_d が nonsingular irreducible curve のときに得られる (nonsingular irreducible) surface X_d を (Y, D) の (d 次 branched) **cyclic cover** という。

Cyclic cover X_d が得られる時、 X_d がどのような曲面になるかを調べる為、以降ではいくつかの指標値 $(p_n, p_g, q, K^2, \kappa)$ について、算出方法や判定法を導き出そう。

始めに準備として以下の結果を示す。

Lemma 2.3. (2.1) において、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ 。

Proof. H を Y 上の ample な divisor とすると、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し

$$(-iD) \cdot H = -\frac{i(B_d \cdot H)}{d} < 0$$

よって $| -iD | = \emptyset$ となり $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ 。 □

X_d の pluri genus は、以下の結果を用いて算出できる。

Proposition 2.4 (p_n of cyclic cover). (2.1) において、

$$p_n(X_d) = \sum_{i=0}^{d-1} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D) - iD))$$

Proof. projection formula 及び (2.1) より

$$\begin{aligned}
f_{d*}\mathcal{O}_{X_d}(nK_{X_d}) &\cong f_{d*}(f_d^*(\mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))) \\
&\cong (f_{d*}\mathcal{O}_{X_d}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)) \\
&\cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D) - iD)
\end{aligned}$$

$$\text{よって } p_g(X_d) = \sum_{i=0}^{d-1} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D) - iD))$$

□

特に geometric genus は、以下の結果を用いて算出できる。

Proposition 2.5 (p_g of cyclic cover). (2.1) において

$$p_g(X_d) = \frac{1}{12}(d-1)(2D^2d^2 + (3K_Y - D)Dd + 12 - 12q(Y)) + dp_g(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$$

Proof. (2.4) より

$$\begin{aligned}
p_g(X_d) &= \sum_{i=0}^{d-1} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + (d-i-1)D)) \\
&= h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y)) + \sum_{i=1}^{d-1} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + iD))
\end{aligned}$$

となるが、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対して Riemann-Roch の定理 ([1] V.Theorem 1.6) 及び (2.3) により

$$\begin{aligned}
h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + iD)) &= h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) - h^0(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) \\
&\quad + \frac{1}{2}iD(K_Y + iD) + 1 - q(Y) + p_g(Y) \\
&= \frac{1}{2}D^2i^2 + \frac{1}{2}(K_Y \cdot D)i + 1 - q(Y) + p_g(Y) + h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
p_g(X_d) &= p_g(Y) + \frac{1}{12}d(d-1)(2d-1)D^2 + \frac{1}{4}d(d-1)(K_Y \cdot D) \\
&\quad + (d-1)(1 - q(Y) + p_g(Y)) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) \\
&= \frac{1}{12}(d-1)(2D^2d^2 + (3K_Y - D)Dd + 12 - 12q(Y)) + dp_g(Y) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))
\end{aligned}$$

□

X_d の irregularity は、以下の結果を用いて算出できる。

Proposition 2.6 (q of cyclic cover). (2.1) において

$$q(X_d) = q(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$$

すなわち、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ ならば $q(X_d) = q(Y)$ 。

Proof. f_d は finite であるため、(2.1) より

$$\begin{aligned} H^1(X_d, \mathcal{O}_{X_d}) &\cong H^1(Y, f_{d*} \mathcal{O}_{X_d}) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) \end{aligned}$$

よって

$$q(X_d) = h^1(X_d, \mathcal{O}_{X_d}) = q(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$$

□

特に D が ample の場合には、以下の結果が得られる。

Corollary 2.7. D が ample なとき、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ 。

Proof. 任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 iD は ample であるため、小平の消滅定理 ([1] III.Remark 7.15) より

$$H^1(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + iD)) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$$

□

また、 $q(Y) = 0$ の場合には、以下のことが言える。

Proposition 2.8. 任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $|iD|$ が irreducible curve を持ち、 $q(Y) = 0$ のとき

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$$

Proof. 任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $C_i \in |iD|$ を irreducible curve とすると、(2.3) より $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i)) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ であり、さらに

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-C_i) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i} \longrightarrow 0$$

より

$$0 \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i)) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \longrightarrow \\ H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i)) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$$

となるため

$$0 = h^0(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i)) - h^0(Y, \mathcal{O}_Y) + h^0(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) - h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i)) \\ = 0 - 1 + 1 - h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i))$$

すなわち $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-C_i)) = 0$ 。

□

Cyclic cover X_d 上の divisor のうち、 f_d により Y から pull back して得られたものに対しては、次の結果が成立する。

Lemma 2.9. Y 上の任意の divisor C, E に対し、 $(f_d^*C).(f_d^*E) = d(C.E)$ 。

Proof. [4] Prop.2.3 による。

□

これより $K_{X_d}^2$ について、次の結果が得られる。

Proposition 2.10 (K^2 of cyclic cover). (2.1) において $K_Y^2 = d(K_Y + (d-1)D)^2$

Proof. (2.9) より $K_Y^2 = d(K_Y + (d-1)D)^2$

□

次に Y からの pull back により得られた divisor が numerically effective となるための判定法を与えよう。

Lemma 2.11. Y 上の divisor E に対し、 E が numerically effective な時、かつそのときに限り $f_d^*(E)$ は numerically effective。

Proof. ($\Rightarrow$)

X_d 上の任意の irreducible curve C に対して $C' := f_d(C)$ とすると C' も irreducible であり

$$(f_d^*(E).C) = \deg(f_d|_C)E.C' \geq 0$$

よって $f_d^*(E)$ は numerically effective。

($\Leftarrow$)

C が Y 上の effective divisor の時、 $f_d^*(C)$ は X_d 上の effective divisor ([4]

$$\text{I.}\S 7) \text{ であるため (2.9) より } C.E = \frac{f_d^*(C).f_d^*(E)}{d} \geq 0$$

□

上記より X_d 極小性を調べるための判定法が得られる。

Proposition 2.12. $\kappa(X_d) \geq 0$ の時、以下の条件は同値である。

- (1) $K_Y + (d-1)D$ は numerically effective.
- (2) X_d は minimal.

Proof. (2.1) (2) より $K_{X_d} \sim f_d^*(K_Y + (d-1)D)$ であるため、(2.11) より

$$\begin{aligned} K_Y + (d-1)D \text{ は numerically effective} &\Leftrightarrow K_{X_d} \text{ は numerically effective} \\ &\Leftrightarrow X_d \text{ は minimal.} \end{aligned}$$

□

以上、cyclic cover X_d について、わかったことをまとめると次のようになる。

Proposition 2.13. (2.1) の条件下において、以下の事が成り立つ。

- (1) $p_n(X_d) = \sum_{i=0}^{d-1} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D) - iD))$
- (2) $p_g(X_d) = \frac{1}{12}(d-1)(2D^2d^2 + (3K_Y - D)Dd + 12 - 12q(Y)) + dp_g(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$
- (3) $q(X_d) = q(Y) + \sum_{i=1}^{d-1} h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD))$
- (4) $K_Y^2 = d(K_Y + (d-1)D)^2$
- (5) $\kappa(X_d) \geq 0$ のとき、次の条件は同値となる。
 - (a) $K_Y + (d-1)D$ は numerically effective
 - (b) X_d は minimal.

次に surface の小平次元についての基本的な補題を挙げておく。

Lemma 2.14. S を nonsingular irreducible surface とすると、以下の事が成り立つ。

- (1) $\kappa(S) = -\infty \Leftrightarrow$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $p_n(S) = 0$ 。
- (2) $\kappa(S) = 0 \Leftrightarrow m_0 \mid n$ のとき $p_n(S) = 1, m_0 \nmid n$ のとき $p_n(S) = 0$ となる $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。
- (3) $\kappa(S) = 1 \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ で、任意の $N \gg 0$ に対し、 $\alpha N \leq p_{m_0 N}(S) \leq \beta N$ なるものが存在する。
- (4) $\kappa(S) = 2 \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ で、任意の $N \gg 0$ に対し、 $\alpha N^2 \leq p_{m_0 N}(S) \leq \beta N^2$ なるものが存在する。

Proof. [2] Def.0-3-1 による。

□

一方 $|D| \neq \phi$ のとき、cyclic cover の pluri-genus $p_n(X_d)$ に対して以下の事が成り立つ。

Lemma 2.15. (2.1) の条件下において、 $|D| \neq \phi$ のとき

$$a(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))$$

とすると、任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し

- (1) $a(n) \leq p_n(X_d) \leq da(n)$
- (2) $\frac{p_n(X_d)}{d} \leq a(n) \leq p_n(X_d)$

となる。

Proof. $n \in \mathbb{N}$ を任意の自然数とする。 $0 \leq i \leq d-1$ に対し

$$a_i(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D) - iD))$$

とすると (2.4) より $p_n(X_d) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i(n)$ であり、また $|D| \neq \phi$ であるため

$$a(n) = a_0(n) \geq a_1(n) \geq \cdots \geq a_{d-2}(n) \geq a_{d-1}(n)$$

すなわち

$$a(n) \leq p_n(X_d) \leq da(n)$$

であり、また

$$\frac{p_n(X_d)}{d} \leq a(n) \leq p_n(X_d)$$

□

すなわち、cyclic cover における $a(n)$ を用いた小平次元の判定法として、以下の結果を得る。

Proposition 2.16. (2.1) の条件下において、 $|D| \neq \phi$ のとき

$$a(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))$$

とすると、以下の事が成り立つ。

- (1) $\kappa(X_d) = -\infty \Leftrightarrow$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 0$ 。
- (2) $\kappa(X_d) = 0 \Leftrightarrow m_0 \mid n$ のとき $a(n) = 1, m_0 \nmid n$ のとき $a(n) = 0$ となる $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。
- (3) $\kappa(X_d) = 1 \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ で、任意の $N \gg 0$ に対し、 $\alpha N \leq a(m_0 N) \leq \beta N$ なるものが存在する。
- (4) $\kappa(X_d) = 2 \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ で、任意の $N \gg 0$ に対し、 $\alpha N^2 \leq a(m_0 N) \leq \beta N^2$ なるものが存在する。

Proof. (1) $(\Rightarrow)$

(2.14)(1) より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $p_n(X_d) = 0$ となるため (2.15)(2) より $a(n) = 0$ 。

(1) $(\Leftarrow)$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 0$ となるため (2.15)(1) より $p_n(X_d) = 0$ 。よって (2.14)(1) より $\kappa(X_d) = -\infty$ 。

(2) $(\Rightarrow)$

ある自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、

$$m_0 \mid n \Rightarrow p_n(X_d) = 1, m_0 \nmid n \Rightarrow p_n(X_d) = 0$$

となるが、 $m_0 \mid n$ のとき (2.15)(2) より

$$\frac{1}{d} \leq a(n) \leq 1$$

となるため $a(n) = 1$ であり、 $m_0 \nmid n$ のときは $a(n) = 0$ 。

(2) $(\Leftarrow)$

$m_0 \mid n$ のとき $a(n) = 1$ であるため (2.15)(1) より $1 \leq p_n(X_d) \leq d$ 。(2.14) より、このような条件が成り立つのは $\kappa(X_d) = 0$ の場合のみ。

(3) $(\Rightarrow)$

ある $\alpha, \beta > 0$ 及び自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、 $N \gg 0$ のとき

$$\alpha N \leq p_{m_0 N}(X_d) \leq \beta N$$

となるが、このとき (2.15)(2) より

$$\frac{\alpha N}{d} \leq a(m_0 N) \leq \beta N$$

(3) $(\Leftarrow)$

(2.15)(1) より ある $\alpha, \beta > 0$ 及び自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、 $N \gg 0$ のとき

$$\alpha N \leq p_{m_0 N}(X_d) \leq d\beta N$$

よって (2.14)(3) より $\kappa(X_d) = 1$ 。

(4) $(\Rightarrow)$

ある $\alpha, \beta > 0$ 及び自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、 $N \gg 0$ のとき

$$\alpha N^2 \leq p_{m_0 N}(X_d) \leq \beta N^2$$

となるが、このとき (2.15)(2) より

$$\frac{\alpha N^2}{d} \leq a(m_0 N) \leq \beta N^2$$

(4) $(\Leftarrow)$

(2.15)(1) より ある $\alpha, \beta > 0$ 及び自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、 $N \gg 0$ のとき

$$\alpha N^2 \leq p_{m_0 N}(X_d) \leq d\beta N^2$$

よって (2.14)(4) より $\kappa(X_d) = 2$ 。

□

3. CYCLIC COVERS ON RATIONAL RULED SURFACE

C を genus g の nonsingular irreducible curve とする。このとき、 C 上の ruled surface

$$p : Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C(\mathcal{E})) \longrightarrow C$$

($\mathcal{E}$ は C 上の rank 2 locally free sheaf) を考える。ruled surface Y の e-invariant は normalized な $\mathcal{E}$ ($h^0(C, \mathcal{O}_C(\mathcal{E})) \neq 0$, $\deg_C \mathcal{L} < 0 \Rightarrow h^0(C, \mathcal{O}_C(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})) = 0$) を選ぶことで

$$e := -\deg_C(\wedge^2(\mathcal{E}))$$

と定義できる。また、 C_0 を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \cong \mathcal{O}_Y(C_0)$ となる section とすると

$$\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathbb{Z}C_0 \oplus p^*\mathrm{Cl}(C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(C)$$

$$\mathrm{Num}(Y) \cong \mathbb{Z}C_0 \oplus \mathbb{Z}F \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

であって、 Y 上の intersection theory は

$$C_0^2 = -e, C_0.F = 1, F^2 = 0$$

で与えられる ([1] V.2)。ruled surface Y について、いくつか補題を挙げておこう。

Lemma 3.1. $e \geq 0$ となる ruled surface Y 上の divisor $D \equiv aC_0 + bF \in \mathrm{Num}(Y)$ に対し、以下の事が成り立つ。

- (1) D が C_0, F 以外の irreducible curve のとき $a > 0, b \geq ae$ 。
- (2) $a > 0, b > ae$ のとき、かつそのときに限り D は ample。
- (3) $a \geq 0, b \geq ae$ のとき、かつそのときに限り D は numerically effective。

Proof. (1),(2) [1] V.Prop.2.20 による。

(3) ($\Rightarrow$)

$E \equiv a'C_0 + b'F$ が C_0, F 以外の irreducible curve のとき、(1) より

$$a' > 0, b' > a'e \text{ または } a' > 0, b' = a'e, e > 0$$

となるため、

$$D.E = -aa'e + ab' + a'b \geq -aa'e + aa'e + a'b \geq a'ae \geq 0$$

$$D.C_0 = b - ae \geq 0$$

$$D.F = a \geq 0$$

すなわち D は numerically effective。

(3) ($\Leftarrow$)

D が numerically effective なとき

$$a = D.F \geq 0, b - ae = D.C_0 \geq 0$$

□

次に、ruled surface が decomposable、すなわち $\mathcal{E}$ が 2 つの invertible sheaf の直和として表される場合を考える。 $\mathcal{E}$ が normalized なとき

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e})$$

($\mathfrak{e}$ は C 上の divisor) となり、 $e = -\deg_C \mathfrak{e} \geq 0$ 。

Lemma 3.2. Y を decomposable な ruled surface とし、 $D \sim aC_0 + \mathfrak{b}F \in \text{Cl}(Y)$ とすると

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = \begin{cases} 0 & (a < 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{k=0}^a h^0(C, \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + \mathfrak{b})) & (a \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

Proof. $Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e}))$ とおくと [1] II.Prop.7.11 より

$$p_*\mathcal{O}_Y(aC_0) \cong p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(a) \cong \begin{cases} 0 & (a < 0 \text{ のとき}) \\ S^a\mathcal{E} \cong \bigoplus_{k=0}^a \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e}) & (a \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって projection formula より

$$\begin{aligned} p_*\mathcal{O}_Y(D) &\cong p_*\mathcal{O}_Y(aC_0 + \mathfrak{b}F) \\ &\cong p_*(\mathcal{O}_Y(aC_0) \otimes_{\mathcal{O}_Y} p^*(\mathfrak{b})) \\ &\cong p_*\mathcal{O}_Y(aC_0) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(\mathfrak{b}) \\ &\cong \begin{cases} 0 & (a < 0 \text{ のとき}) \\ \bigoplus_{k=0}^a \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + \mathfrak{b}) & (a \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = h^0(C, p_*\mathcal{O}_Y(D)) = \begin{cases} 0 & (a < 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{k=0}^a h^0(C, \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + \mathfrak{b})) & (a \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

□

Decomposable ruled surface の特別な場合として、 Y が rational ruled surface $\mathbb{F}_e = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))$ の場合を考える。この場合 *equiv* と *sim* は同値となり、これまでよりもさらに強い結果が得られる。

Lemma 3.3. Rational ruled surface $Y = \mathbb{F}_e$ 上の divisor $D \sim aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ に対し、次の条件は同値である。

- (1) $|D|$ は nonsingular irreducible curve を持つ。
- (2) $|D|$ は irreducible curve を持つ。
- (3) $a = 1, b = 0$ または $a = 0, b = 1$ または $a > 0, b > ae$ または $a > 0, b = ae, e > 0$ 。

Proof. [1] V.Cor.2.18 による。

□

上記より、rational ruled surface 上の cyclic cover に対しては、次の結果を得る。

Corollary 3.4. Rational ruled surface $Y = \mathbb{F}_e$ 及び divisor $D \sim aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ に対し、次の条件は同値である。

- (1) ある $d \geq 2$ に対し (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られる。
- (2) 任意の $d \geq 2$ に対し (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られる。
- (3) $b \geq a > 0, e = 0$ または $a > 0, b \geq ae, e > 0$ 。

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) は自明。

(1) $\Rightarrow$ (3)

(2.1) より、ある $d \geq 2$ に対して $|dD|$ は nonsingular irreducible curve B_d を持つ。すなわち (3.3) より

$$da > 0, db > dae \text{ または } da > 0, db = dae, e > 0$$

$$\Leftrightarrow a > 0, b > 0, e = 0 \text{ または } a > 0, b \geq ae, e > 0$$

となるが、 $e = 0$ のときは $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるため、projection のとり方により C_0, F は入れ替えることができるため、 $b \geq a > 0$ として良い。すなわち (3) が成り立つ。

(3) $\Rightarrow$ (2)

(3) が成り立つとき (3.3) より、任意の $d \geq 2$ に対して $|dD|$ は nonsingular irreducible curve B_d を持つため、(2.1) より (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られる。

□

Lemma 3.5. Rational ruled surface $Y = \mathbb{F}_e$ 上の divisor $D \sim aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ に対し (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られるとき、以下の事が成り立つ。

- (1) $|D| \neq \emptyset$
- (2) $D^2 > 0$
- (3) 任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$

Proof. (3.4) より、 $b \geq a > 0, e = 0$ または $a > 0, b \geq ae, e > 0$ 。

(1) (3.3) より $|D| \neq \emptyset$ 。

(2) $e = 0$ のとき $D^2 = 2ab \geq 2a^2 > 0$ 、 $e > 0$ のとき $D^2 = a(2b - ae) \geq a^2e > 0$ 。

(3) $q(Y) = 0$ であり、(3.3) より任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し $|iD|$ は irreducible curve を持つため、(2.8) より $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ 。 □

Lemma 3.6. Rational ruled surface $Y = \mathbb{F}_e$ 上の divisor $D \sim aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ に対し

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = \begin{cases} 0 & (a < 0 \text{ または } b < 0 \text{ のとき}) \\ (a+1)(b+1) & (a \geq 0, b \geq 0, e = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}(M+1)(2b+2-Me) & (a \geq 0, b \geq 0, e > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(ただし $M := \min(a, \left\lceil \frac{b}{e} \right\rceil)$)

であり、 $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = 0$ のとき、かつそのときに限り $a < 0$ または $b < 0$ となる。

Proof. (3.2) より $a < 0$ ならば $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = 0$ なので $a \geq 0$ とすると

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = \sum_{k=0}^a h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b - ke))$$

[1] $b < 0$ のとき

任意の $0 \leq k \leq a$ に対して $b - ke < 0$ となるため $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = 0$

[2] $b \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) &= \sum_{k=0}^a h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b - ke)) \\ &\geq h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)) \\ &= b + 1 > 0 \end{aligned}$$

であるため、 $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = 0$ のとき、かつそのときに限り $a < 0$ または $b < 0$ 。

(a) $e = 0$ のとき

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = \sum_{k=0}^a h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)) = (a + 1)(b + 1)$$

(b) $e > 0$ のとき

k についての不等式 $b - ke \geq 0$ を解くと $k \leq \left\lfloor \frac{b}{e} \right\rfloor$ 。そこで

$$M := \min(a, \left\lfloor \frac{b}{e} \right\rfloor)$$

とすると

$$\begin{aligned} h^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) &= \sum_{k=0}^a h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b - ke)) \\ &= \sum_{k=0}^M h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b - ke)) \\ &= \sum_{k=0}^M (b + 1 - ke) \\ &= (b + 1)(M + 1) - \frac{1}{2}M(M + 1)e \\ &= \frac{1}{2}(M + 1)(2b + 2 - Me) \end{aligned}$$

□

以上の結果を基に、rational ruled surface の cyclic cover に関する次の結果を得る。

Proposition 3.7. Rational ruled surface $Y = \mathbb{F}_e$ 及び divisor $D \sim aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ に対し (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られるとき、以下の事が成り立つ。

(1) $e = 0$ のとき

- (a) $\kappa(X_d) = -\infty \Leftrightarrow a < \frac{2}{d-1}$
- (b) $\kappa(X_d) = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{2}{d-1}$
- (c) $\kappa(X_d) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{d-1}, b > \frac{2}{d-1}$
- (d) $\kappa(X_d) = 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{d-1}$

(2) $e > 0$ のとき

- (a) $\kappa(X_d) = -\infty \Leftrightarrow a < \frac{2}{d-1}$ または $b < \frac{e+2}{d-1}$
- (b) $\kappa(X_d) = 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{2}{d-1}, b = \frac{e+2}{d-1}$
- (c) $\kappa(X_d) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{d-1}, b > \frac{e+2}{d-1}$
- (d) $\kappa(X_d) = 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{d-1}, b > \frac{e+2}{d-1}$

Proof. (3.5) (1) より $|D| \neq \emptyset$ 。そこで $a(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))$ とすると、

$$n(K_Y + (d-1)D) \sim n(a(d-1) - 2)C_0 + n(b(d-1) - e - 2)F$$

であるため (3.6) より

$$a(n) = \begin{cases} 0 & (a < \frac{2}{d-1} \text{ または } b < \frac{e+2}{d-1}) \\ ((a(d-1) - 2)n + 1)((b(d-1) - 2)n + 1) & (e = 0, b \geq a \geq \frac{2}{d-1}) \\ \frac{1}{2}(M(n) + 1)(2(b(d-1) - e - 2)n + 2 - M(n)e) & (e > 0, a \geq \frac{2}{d-1}, b \geq \frac{e+2}{d-1}) \end{cases}$$

$$(\text{ただし } M(n) := \min((a(d-1) - 2)n, \left\lfloor \frac{(b(d-1) - e - 2)n}{e} \right\rfloor))$$

であり

$$a(n) = 0 \Leftrightarrow a < \frac{2}{d-1} \text{ または } b < \frac{e+2}{d-1}$$

(1) $e = 0$ のとき

(a) $(\Leftrightarrow)$

$\kappa(X_d) = -\infty$ となることは (2.16)(1) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 0$ となることと同値であり、すなわち $a < \frac{2}{d-1}$ になることと同値 ($b \geq a$)。

(b) ($\Rightarrow$)

(2.16) (2) より、ある自然数 m_0 に対し

$$n \mid m_0 \Rightarrow a(n) = 1$$

すなわち任意の自然数 $n' \in \mathbb{N}$ に対し

$$((a(d-1) - 2)m_0n' + 1)((b(d-1) - 2)m_0n' + 1) = 1$$

となるため、 $a = b = \frac{2}{d-1}$

(b) ($\Leftarrow$)

任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 1$ となるため、(2.16) (2) より $\kappa(X_d) = 0$ 。

(c) ($\Rightarrow$)

(2.16) (3) より、ある $\alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、 $N \gg 0$ のとき

$$\alpha N \leq a(m_0N) = ((a(d-1) - 2)m_0N + 1)((b(d-1) - 2)m_0N + 1) \leq \beta N$$

よって $b > a = \frac{2}{d-1}$

(c) ($\Leftarrow$)

任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = (b(d-1) - 2)n + 1$ となるため

$$(b(d-1) - 2)n \leq a(n) \leq 2(b(d-1) - 2)n$$

よって (2.16) (3) より $\kappa(X_d) = 1$ 。

(d) ($\Leftrightarrow$) (a)~(c) より

$$\kappa(X_d) = 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{d-1}$$

(2) $e > 0$ のとき

(a) ($\Leftrightarrow$)

$\kappa(X_d) = -\infty$ となることは (2.16)(1) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 0$ となることと同値であり、すなわち $a < \frac{2}{d-1}$ または $b < \frac{e+2}{d-1}$ と同値。

(b) ($\Rightarrow$)

(2.16) (2) より、ある自然数 m_0 に対し

$$n \mid m_0 \Rightarrow a(n) = 1$$

すなわち任意の自然数 $n' \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}(M(m_0n') + 1)(2(b(d-1) - e - 2)m_0n' + 2 - M(m_0n')e) \\ &\geq \frac{1}{2}(2(b(d-1) - e - 2)m_0n' + 2 - (\frac{(b(d-1) - e - 2)m_0n'}{e})e) \\ &= \frac{1}{2}(b(d-1) - e - 2)m_0n' + 1 \quad \text{であり} \quad b(d-1) - e - 2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって $b = \frac{e+2}{d-1}$, $a \geq \frac{2}{d-1}$

(b) ($\Leftarrow$)

任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 1$ となるため、(2.16) (2) より $\kappa(X_d) = 0$ 。

(c) ($\Rightarrow$)

(2.16) (3) より、ある $\alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、 $N \gg 0$ のとき

$$\alpha N \leq a(m_0 N) \leq \beta N$$

一方、 $M(m_0 N) = \min((a(d-1)-2)m_0 N, \left\lceil \frac{(b(d-1)-e-2)m_0 N}{e} \right\rceil)$ より

$$\begin{aligned} a(m_0 N) &= \frac{1}{2}(M(m_0 N) + 1)(2(b(d-1) - e - 2)m_0 N + 2 - M(m_0 N)e) \\ &\geq \frac{1}{2}(M(m_0 N) + 1)(2(b(d-1) - e - 2)m_0 N + 2 - (\frac{(b(d-1) - e - 2)m_0 N}{e})e) \\ &= \frac{1}{2}(M(m_0 N) + 1)((b(d-1) - e - 2)m_0 N + 2) \end{aligned}$$

ここで、 $b = \frac{e+2}{d-1}$ とすると $M(m_0 N) = 0$ より $a(m_0 N) = 1$ と

なるが、これは仮定に反する。よって $b > \frac{e+2}{d-1}$ であり

$$\beta N \geq a(m_0 N) \geq \frac{1}{2}(M(m_0 N) + 1)((b(d-1) - e - 2)m_0 N + 2)$$

すなわち $M(m_0 N)$ は有界となるため、 $a = \frac{2}{d-1}$ 。

(c) ($\Leftarrow$)

任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = (b(d-1) - e - 2)n + 1$ となるため

$$(b(d-1) - e - 2)n \leq a(n) \leq 2(b(d-1) - e - 2)n$$

よって (2.16) (3) より $\kappa(X_d) = 1$ 。

(d) ($\Leftrightarrow$) (a) $\sim$ (c) より

$$\kappa(X_d) = 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{d-1}, \quad b > \frac{e+2}{d-1}$$

□

次に、第2節の結果を用いて $q(X_d), p_g(X_d), K_{X_d}^2$ を計算し、また X_d の極小性を調べよう。

Proposition 3.8. Rational ruled surface $Y = \mathbb{F}_e$ の cyclic cover X_d に対して次のことが成立する。

- (1) $q(X_d) = 0$
- (2) $p_g(X_d) = \frac{1}{12}(d-1)(2a(2b-ae)d^2 + (a^2e - 2ab + 3ae - 6a - 6b)d + 12)$
- (3) $K_{X_d}^2 = d(a(d-1) - 2)((2b-ae)(d-1) - 4)$
- (4) $\kappa(X_d) \geq 0$ のとき、次の条件は同値となる。
 - (a) $e \neq 0$ または $e = 1, b > a$
 - (b) X_d は minimal。

Proof. (3.5) より、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ であるため

$$(1) \text{ (2.6) より } q(X_d) = q(Y) = 0$$

$$(2) \text{ (2.5) (1) より}$$

$$\begin{aligned} p_g(X_d) &= \frac{1}{12}(d-1)(2D^2d^2 + (3K_Y - D)Dd + 12 - 12q(Y)) + dp_g(Y) \\ &= \frac{1}{12}(d-1)(2a(2b-ae)d^2 + (a^2e - 2ab + 3ae - 6a - 6b)d + 12) \end{aligned}$$

$$(3) \text{ (2.10) より}$$

$$\begin{aligned} K_{X_d}^2 &= d(K_Y + (d-1)D)^2 \\ &= d(a(d-1) - 2)((2b-ae)(d-1) - 4) \end{aligned}$$

$$(4) \kappa(X_d) \geq 0 \text{ であるため (3.7) より } a \geq \frac{2}{d-1}, b \geq \frac{e+2}{d-1}。 \text{ さらに、}$$

$$K_Y + (d-1)D \sim (a(d-1) - 2)C_0 + (b(d-1) - e - 2)F$$

であるため、 X_d が minimal であることは (2.12) より

$$(3.1) \quad b(d-1) - e - 2 - (a(d-1) - 2)e = (b-ae)(d-1) + e - 2 \geq 0$$

となることと同値。

$$((a) \Rightarrow (b))$$

$e \geq 2$ なら (3.1) は成立する。

$e = 1$ のとき、仮定より $b > a$ であるため

$$(b-ae)(d-1) + e - 2 = (b-a)(d-1) - 1 \geq 0$$

となり (3.1) は成立する。

$e = 0$ のとき、 $b(d-1) - 2 \geq 0$ となるため (3.1) は成立する。以上より X_d は minimal。

((a) $\Leftarrow$ (b))

$e \geq 2$ のとき、(3.1) は成立する。

$e = 1$ のとき、(3.1) より $(b-a)(d-1) \geq 1$ となるため $b > a$ 。

$e = 0$ のとき、(3.1) は成立する。以上より、 $e \neq 0$ または $e = 1, b > a$ となる。

□

Cyclic cover X_d がある surface に birational な時、birational morphism は 1 点 blow-up による有限個の合成として表すことができる ([1] V.Corollary 5.4)。その場合、合成した個数は以下の補題を用いて求めることができる。

Lemma 3.9. Surface 間の birational morphism $\sigma : S' \rightarrow S$ が N 個の 1 点 blow-up に分解できるとき

$$N = K_S^2 - K_{S'}^2$$

Proof. birational morphism σ を N 個の 1 点 blow-up

$$S' = S_N \rightarrow S_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 = S$$

に分解したとき、各 $0 \leq i \leq N-1$ に対して $K_{S_{i+1}}^2 = K_{S_i}^2 - 1$ であるため $N = K_S^2 - K_{S'}^2$ 。

□

Remark 3.10. (3.7) において、 e, a, b, d は整数で (3.4) の条件を満たす。そこで (Y, D) , d についての条件を調べ、それぞれの場合について X_d がどのような曲面になるか (3.8), (3.9) を用いて調べると、次のように分類される。

- (1) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は rational ruled surface の $2D^2$ 点 blow-up。
 - (a) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (1, b)$ ($b \geq 1$), $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e > 0$), $D \sim C_0 + bF$ ($b \geq e$), $d = 2$
- (2) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は rational ruled surface の 8 点 blow-up。
 - (a) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim 2C_0 + 2F$, $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim C_0 + F$, $d = 3$
- (3) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は K-3 surface。
 - (a) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (2, 2)$, $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (1, 1)$, $d = 3$
 - (c) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim 2C_0 + 3F$, $d = 2$
 - (d) $Y \cong \mathbb{F}_2$, $D \sim 2C_0 + 4F$, $d = 2$
 - (e) $Y \cong \mathbb{F}_2$, $D \sim C_0 + 2F$, $d = 3$
- (4) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は K-3 surface の d 点 blow-up。
 - (a) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim 3C_0 + 3F$, $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim C_0 + F$, $d = 4$

- (5) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は $\kappa(X_d) = 1$ の minimal elliptic surface。
- (a) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \leq 2$), $D \sim 2C_0 + bF$ ($b \geq e + 3$), $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \leq 2$), $D \sim C_0 + bF$ ($b \geq 2$), $d = 3$
 - (c) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \geq 3$), $D \sim 2C_0 + bF$ ($b \geq 2e$), $d = 2$
 - (d) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \geq 3$), $D \sim C_0 + bF$ ($b \geq e$), $d = 3$
- (6) 以下が成り立つとき、 X_d は minimal でない surface of general type。
- (a) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim a(C_0 + F)$, $a > \frac{3}{d-1}$
- (7) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は minimal な surface of general type。
- (a) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (a, b)$ ($b \geq a > \frac{2}{d-1}$)
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim aC_0 + bF$ ($b > a > \frac{2}{d-1}$)
 - (c) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \geq 2$), $D \sim aC_0 + bF$ ($a > \frac{2}{d-1}$, $b \geq ae$)

4. CYCLIC COVERS ON RULED SURFACE WITH IRREGULARITY $g \geq 1$

本節では、 Y が genus 1 以上の nonsingular irreducible curve C 上における decomposable な rank2 locally free sheaf によって定められる ruled surface

$$p: Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e})) \longrightarrow C$$

($\mathfrak{e}$ は C 上の divisor で $\deg_C \mathfrak{e} \leq 0$) の場合を考える。

以下、 $D \equiv aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ とし、 D は ample かつ $|D| \neq \emptyset$ と仮定する。このとき (3.1) (2) より $a > 0$, $b > ae$ が成り立つ。

$a(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))$ について調べると、以下の結果が得られる。

Lemma 4.1. Genus $g \geq 1$ の nonsingular irreducible curve C 上の decomposable ruled surface

$$p: Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e})) \longrightarrow C$$

及び Y の ample かつ $|D| \neq \emptyset$ となる divisor $D \sim aC_0 + bF \in \text{Cl}(Y)$ に対し、 (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られるとき、 $a(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))$ とすると

$$a(n) = \begin{cases} 0 & (a < \frac{2}{d-1} \text{ のとき}) \\ \sum_{k=0}^{(a(d-1)-2)n} h^0(C, \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}))) & (a \geq \frac{2}{d-1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

さらに、 $a \geq \frac{2}{d-1}$ のとき $T := 2g - 2 + (b - \frac{1}{2}ae)(d-1)$ とすると、 $T > 0$ であり

$$n \gg 0 \Rightarrow a(n) = ((a(d-1) - 2)n + 1)(Tn + 1 - g)$$

Proof. $n(K_Y + (d-1)D) \sim n(a(d-1) - 2)C_0 + n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b})F$ であるため (3.2) (1) より

$$a(n) = \begin{cases} 0 & (a < \frac{2}{d-1} \text{ のとき}) \\ \sum_{k=0}^{n(a(d-1)-2)} h^0(C, \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}))) & (a \geq \frac{2}{d-1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a \geq \frac{2}{d-1}$ のとき、任意の $0 \leq k \leq n(a(d-1) - 2)$ に対し、Riemann-Roch の定理 ([1] IV.Theorem 1.3) より

$$\begin{aligned} & h^0(C, \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}))) \\ &= h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - k\mathfrak{e} - n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}))) \\ & \quad + n \deg_C(k\mathfrak{e} + K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}) + 1 - g \end{aligned}$$

となるが、 $b = \deg_C \mathfrak{b}$ とすると

$$\begin{aligned}
& \deg_C(K_C - k\mathfrak{e} - n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b})) \\
&= 2g - 2 + ek - (2g - 2 - e + b(d-1))n \\
&\leq 2g - 2 + (a(d-1) - 2)en - (2g - 2 - e + b(d-1))n \\
&= 2g - 2 - (2g - 2 + (b - ae)(d-1) + e)n
\end{aligned}$$

ここで、 $2g - 2 + (b - ae)(d-1) + e > 0$ であるため $n \gg 0$ のとき

$$\deg_C(K_C - k\mathfrak{e} - n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b})) < 0$$

よって

$$\begin{aligned}
h^0(C, \mathcal{O}_C(k\mathfrak{e} + n(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}))) &= k\deg_C \mathfrak{e} + n\deg_C(K_C + \mathfrak{e} + (d-1)\mathfrak{b}) + 1 - g \\
&= (2g - 2 - e + b(d-1))n - ek + 1 - g
\end{aligned}$$

となるため

$$\begin{aligned}
a(n) &= \sum_{k=0}^{(a(d-1)-2)n} ((2g - 2 - e + b(d-1))n - ek + 1 - g) \\
&= ((a(d-1) - 2)n + 1)((2g - 2 - e + b(d-1))n - \frac{1}{2}(a(d-1) - 2)en + 1 - g) \\
&= ((a(d-1) - 2)n + 1)((2g - 2 + (b - \frac{1}{2}ae)(d-1))n + 1 - g)
\end{aligned}$$

ここで $T := 2g - 2 + (b - \frac{1}{2}ae)(d-1)$ とすると $T > \frac{1}{2}ae(d-1) \geq 0$ であり

$$a(n) = (n(a(d-1) - 2) + 1)(nT + 1 - g)$$

□

上記より以下の結果が得られる。

Proposition 4.2. Genus $g > 0$ の nonsingular irreducible curve C 上の decomposable ruled surface

$$p : Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e})) \longrightarrow C$$

及び Y の ample かつ $|D| \neq \emptyset$ となる divisor $D \sim aC_0 + \mathfrak{b}F \in \text{Cl}(Y)$ に対し、 (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られるとき、以下の事が成り立つ。

- (1) $\kappa(X_d) = -\infty \Leftrightarrow a < \frac{2}{d-1}$
- (2) $\kappa(X_d) \neq 0$
- (3) $\kappa(X_d) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{d-1}$
- (4) $\kappa(X_d) = 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{d-1}$

Proof. $a(n) := h^0(Y, \mathcal{O}_Y(n(K_Y + (d-1)D)))$ とする。

(1) $(\Rightarrow)$

(2.16) (1) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n) = 0$ となるが、(4.1) よりこれが成り立つのは $a < \frac{2}{d-1}$ の場合のみ。

(1) $(\Leftarrow)$

(4.1) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_0(n) = 0$ となるため (2.16) (1) より $\kappa(X_d) = -\infty$

(3) $(\Rightarrow)$

(2.16) (3) より、ある $\alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し

$$N \gg 0 \Rightarrow \alpha N \leq a(m_0 N) \leq \beta N$$

となるが、このとき (4.1) より

$$\beta N \geq a(m_0 N) = ((a(d-1) - 2)m_0 N + 1)(m_0 T N + 1 - g), \quad T > 0$$

$$\text{よって } a = \frac{2}{d-1}$$

(3) $(\Leftarrow)$

(4.1) より $n \gg 0$ に対し $a(n) = Tn + 1 - g$ ($T > 0$) となるため

$$\frac{1}{2}Tn \leq a(n) \leq dTn$$

よって (2.16) (3) より $\kappa(X_d) = 1$

(4) $(\Rightarrow)$

(2.16) (3) より、ある $\alpha, \beta > 0$ 及び $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し、

$$N \gg 0 \Rightarrow \alpha N^2 \leq a(m_0 N) \leq \beta N^2$$

となるが、このとき数式 (4.1) より

$$\alpha N^2 \leq a(m_0 N) = ((a(d-1) - 2)m_0 N + 1)(m_0 T N + 1 - g), \quad T > 0$$

$$\text{よって } a > \frac{2}{d-1}$$

(4) $(\Leftarrow)$

(4.1) より $n \gg 0$ に対し $a(n) = ((a(d-1) - 2)n + 1)(Tn + 1 - g)$ ($T > 0$) となるため

$$\frac{1}{2}(a(d-1) - 2)Tn^2 \leq a(n) \leq 2(a(d-1) - 2)Tn^2$$

よって (2.16) (3) より $\kappa(X_d) = 2$ 。

(2) (1), (3), (4) より $\kappa(X_d) \neq 0$

□

(3.8) と同様に、次のことが成立する。

Proposition 4.3. (4.2) の cyclic cover X_d に対して次のことが成立する。

- (1) $q(X_d) = q(Y) = g$
- (2) $p_g(X_d) = \frac{1}{12}(d-1)(2a(2b-ae)d^2 + (a^2e - 2ab + 3ae + 6ag - 6a - 6b)d + 12 - 12g)$
- (3) $K_{X_d}^2 = d(a(d-1) - 2)((2b-ae)(d-1) + 4g - 4)$
- (4) $\kappa(X_d) \geq 0$ のとき X_d は minimal。

Proof. D は ample であるため (2.7) より任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0$ 。

- (1) (2.6) より $q(X_d) = q(Y) = g$
- (2) (2.5) (1) より

$$\begin{aligned} p_g(X_d) &= \frac{1}{12}(d-1)(2D^2d^2 + (3K_Y - D)Dd + 12 - 12q(Y)) + dp_g(Y) \\ &= \frac{1}{12}(d-1)(2a(2b-ae)d^2 + (a^2e - 2ab + 3ae + 6ag - 6a - 6b)d + 12 - 12g) \end{aligned}$$

- (3) (2.10) より

$$\begin{aligned} K_{X_d}^2 &= d(K_Y + (d-1)D)^2 \\ &= d(a(d-1) - 2)((2b-ae)(d-1) + 4g - 4) \end{aligned}$$

- (4) $K_Y + (d-1)D \equiv (a(d-1) - 2)C_0 + (b(d-1) - e + 2g - 2)F$ であり、また $\kappa(X_d) \geq 0$ であるため (4.2) より $a(d-1) - 2 \geq 0$ 。すなわち

$$(b(d-1) - e + 2g - 2) \geq (a(d-1) - 2)e$$

を示せば良いが

$$(b(d-1) - e + 2g - 2) - (a(d-1) - 2)e = (b - ae)(d-1) + 2g - 2 + e > 0$$

□

Remark 4.4. (4.3) より X_d がどのような曲面になるか調べると、以下の通りとなる。

- $\kappa(X_d) = -\infty$ のとき X_d は irregularity g の ruled surface の $4b - 2e$ 点 blow-up。
- $\kappa(X_d) \geq 1$ のとき X_d は minimal。

(3.10)、(4.4) の結果をまとめると、以下の結果が得られる。

Theorem 4.5 (Classification of cyclic cover on decomposable ruled surface). Genus g の nonsingular irreducible curve C 上の decomposable ruled surface

$$p : Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e})) \longrightarrow C$$

及び Y の divisor $D \equiv aC_0 + bF \in \text{Num}(Y)$ に対し、 $g > 0$ のとき D は ample かつ $|D| \neq \emptyset$ と仮定する。 (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が得られるとき、 $(Y, D), d$ および X_d は次のように分類される。

- (1) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は irregularity が g と等しい ruled surface の $2D^2$ 点 blow-up。
 - (a) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (1, b)$ ($b \geq 1$), $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e > 0$), $D \sim C_0 + bF$ ($b \geq e$), $d = 2$
 - (c) $Y \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e}))$ ($g \geq 1$), $D \equiv C_0 + bF$ ($b \geq e$), $d = 2$
- (2) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は rational ruled surface の 8 点 blow-up。
 - (a) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim 2C_0 + 2F$, $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim C_0 + F$, $d = 3$
- (3) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は K-3 surface。
 - (a) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (2, 2)$, $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (1, 1)$, $d = 3$
 - (c) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim 2C_0 + 3F$, $d = 2$
 - (d) $Y \cong \mathbb{F}_2$, $D \sim 2C_0 + 4F$, $d = 2$
 - (e) $Y \cong \mathbb{F}_2$, $D \sim C_0 + 2F$, $d = 3$
- (4) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は K-3 surface の d 点 blow-up。
 - (a) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim 3C_0 + 3F$, $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim C_0 + F$, $d = 4$
- (5) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は $\kappa(X_d) = 1$ の minimal な elliptic surface。
 - (a) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \leq 2$), $D \sim 2C_0 + bF$ ($b \geq e + 3$), $d = 2$
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \leq 2$), $D \sim C_0 + bF$ ($b \geq 2$), $d = 3$
 - (c) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \geq 3$), $D \sim 2C_0 + bF$ ($b \geq 2e$), $d = 2$
 - (d) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \geq 3$), $D \sim C_0 + bF$ ($b \geq e$), $d = 3$
 - (e) $Y \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e}))$ ($g \geq 1$), $D \cong 2C_0 + bF$ ($b > 2e$), $d = 2$
 - (f) $Y \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e}))$ ($g \geq 1$), $D \equiv C_0 + bF$ ($b > e$), $d = 3$
- (6) 以下が成り立つとき、 X_d は minimal でない surface of general type。
 - (a) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim a(C_0 + F)$, $a > \frac{3}{d-1}$
- (7) 以下のいずれかが成り立つとき、 X_d は minimal な surface of general type。
 - (a) $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $D \sim (a, b)$ ($b \geq a > \frac{2}{d-1}$)
 - (b) $Y \cong \mathbb{F}_1$, $D \sim aC_0 + bF$ ($b > a > \frac{2}{d-1}$)
 - (c) $Y \cong \mathbb{F}_e$ ($e \geq 2$), $D \sim aC_0 + bF$ ($a > \frac{2}{d-1}$, $b \geq ae$)
 - (d) $Y \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\mathfrak{e}))$ ($g \geq 1$), $D \equiv aC_0 + bF$ ($a > \frac{2}{d-1}$, $b > ae$)

5. THE GEOGRAPHY OF p_g AND K_X^2 FOR CYCLIC CCOVERS

Y を nonsingular surface とし、 D を条件

$$(5.1) \quad d \gg 0 \Rightarrow |dD| \text{ は nonsingular irreducible curve } B_d \text{ を持つ}$$

を満たす Y 上の divisor とする。 $d \gg 0$ のとき、(2.1) より丁度 B_d 上で branch する Y 上の d 次 cyclic cover

$$f_d : X_d = \mathbf{Spec}\left(\bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_Y(-iD)\right) \longrightarrow Y$$

を取ることができる。第2節の結果より、 X_d に対し次のことが成立する。

Proposition 5.1. (Y, D) が条件 (5.1) を満たし、さらに任意の自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対し

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0, \quad D^2 > 0$$

となるとき

$$d \rightarrow \infty \Rightarrow K_{X_d}^2 - 4p_g(X_d) \rightarrow \infty$$

Proof. (2.5), (2.10) より

$$K_{X_d}^2 - 4p_g(X_d) = \frac{1}{3}(D^2 d^3 + (3K_Y - 3D)Dd^2 + (3K_Y^2 - 3K_Y D + 2D^2 - 12 + 12q(Y))d + 12 - 12q(Y))$$

であり、 $D^2 > 0$ であるため $d \rightarrow \infty$ のとき $K_{X_d}^2 - 4p_g(X_d) \rightarrow \infty$ 。

□

このような条件下では $d \rightarrow \infty$ のとき $K_{X_d}^2 \rightarrow \infty$ となるため、 $d \gg 0$ に対しては $\kappa(X_d) = 2$ となる。そこで、 $p_g(X_d)$ を横軸、 $K_{X_d}^2$ を縦軸に取った図において、 X_d がどのように分布するかを考える。

S を $\kappa(S) = 2$ なる minimal な nonsingular irreducible surface とする。このとき、 S に対して次のことが成り立つことが知られている。

Fact 5.2 (Noether の不等式).

$$K_S^2 \geq 2p_g(S) - 4$$

Proof. [5] X. Ex.1 による。

□

Fact 5.3 (宮岡-Yau の不等式).

$$K_S^2 \leq 9(1 - q(S) + p_g(S))$$

Proof. [7] による。

□

さらに canonical surface の概念を定義しよう。

Definition 5.4. S を nonsingular irreducible surface とする。 S の canonical divisor K_S の定める rational map

$$\phi_{K_S} : S \longrightarrow \mathbb{P}^{p_g(S)-1}$$

において、 Φ_{K_S} がその像 $S_0 := \Phi_{K_S}(S)$ への birational map となっているとき、 S は **canonical surface** であるという。このとき、明らかに $\kappa(S) = 2$ 。

Fact 5.5 (Castelnuovo の不等式).

$$S \text{ が canonical かつ minimal なとき } K_S^2 \geq 3p_g(S) - 7.$$

Proof. [6] Th.5.5 による。 □

従って general type となる X_d のほとんどは直線 $K_{X_d}^2 = 2p_g(X_d) - 4$, $K_{X_d}^2 = 3p_g(X_d) - 7$ より上にあり、 $K_{X_d}^2 = 9(1 - q(X_d) + p_g(X_d))$ よりはず下にある。

canonical surface については、さらに次の予想がある。

Conjecture 5.6 (Reid 予想). S を minimal canonical surface とする。 S の canonical image を $S_0 \subseteq \mathbb{P}^{p_g(S)-1}$ とすると、次のいずれかが成立する。

- (1) $K_S^2 \geq 4p_g(S) - 12$
- (2) S_0 を通る $\mathbb{P}^{p_g(S)-1}$ 内の quadric hypersurface の交わり $Q(S)$ における irreducible component のうち、 S_0 を含むものの次元は 3。

上記の予想が cyclic cover X_d に対して、当てはまるかどうか調べた結果は以下の通りとなる。

Theorem 5.7. 十分大きい全ての d に対して (Y, D) の d 次 cyclic cover X_d が取得でき、さらに任意の自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対し

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0, \quad D^2 > 0$$

となるとき X_d の minimal model を $\overline{X_d}$ とすると、 $d \geq N$ ならば $K_{\overline{X_d}}^2 \geq 4p_g(\overline{X_d}) - 12$ となる自然数 N が存在する。

Proof. (5.1) 及び $K_{X_d}^2 \leq K_{\overline{X_d}}^2$ による。 □

すなわち $d \geq N$ のとき、canonical かつ $\kappa(\overline{X_d}) = 2$ となる $\overline{X_d}$ に対して Reid 予想は正しい。そこで、次に第3節で調べた Y が rational ruled surface の場合において、 N が実際にいくつになるかを調べてみる。

Example 5.8. Y を rational ruled surface $\mathbb{F}_e$ 、 $D \equiv aC_0 + bF$ とし、 $a > 0, b \geq ae, e > 0$ または $b \geq a, e = 0$ が成り立つと仮定すると、(3.4) より (Y, D) は条件 (5.1) を満たし、(3.5) (1),(3) より 任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対し

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0, \quad D^2 > 0$$

そこで $f(d) := 3(K_{X_d})^2 - 4p_g(X_d) + 12$ としたとき、 $d \geq N \Rightarrow f(d) \geq 0$ となる自然数 N がいくつかを求めよう。

(3.8) より

$$\begin{aligned} f(d) &= a(2b - ae)d^3 + (3a^2e - 6ab + 3ae - 6a - 6b)d^2 \\ &\quad + (-2a^2e + 4ab - 3ae + 6a + 6b + 12)d + 48 \\ &= d(d-1)((2a(d-2) - 6)(b - ae) + a(a(d-2)e - 3e - 6)) + 12(d+4) \\ f'(d) &= 3a(2b - ae)d^2 + (6a^2e - 12ab + 6ae - 12a - 12b)d \\ &\quad - 2a^2e + 4ab - 3ae + 6a + 6b + 12 \\ f''(d) &= 6a(2b - ae)d + 6a^2e - 12ab + 6ae - 12a - 12b \end{aligned}$$

$a(2b - ae) > 0$ であり、 $f''(7) = (72a - 12)(b - ae) + a(36ae - 6e - 12) > 0$ となるため、 $d \geq 7$ のとき $f''(d) > 0$ 。よって $f'(d)$ は $d \geq 7$ で単調増加となり

$$f'(7) = (214a - 78)(b - ae) + a(107ae - 39e - 78) + 12 > 0$$

すなわち $f(d)$ も $d \geq 7$ で単調増加。

$e > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(9) &= 72((14a - 6)(b - ae) + a(7ae - 3e - 6)) + 156 \\ &= 72((14a - 6)(b - ae) + a((7a - 3)e - 6)) + 156 \end{aligned}$$

となるため、 $f(9)$ は $b = ae, e = 1, a = 1$ のとき最小値 12 をとる。よって $f(9) \geq 0$ 。さらに

$$f(8) = 56((12a - 6)(b - ae) + a((6a - 3)e - 6)) + 144$$

となるが、 $b = ae, e = 1, a = 1$ のとき $f(8) = -24 < 0$ 。すなわち

$$d \geq 9 \Rightarrow f(d) \geq 0$$

$e = 0$ のとき $b \geq a$ より

$$\begin{aligned} f(7) &= 42((10a - 6)(b - a) + 10a^2) + 132 > 0 \\ f(6) &= 30((8a - 6)(b - a) + 8a^2) + 120 > 0 \\ f(5) &= 20((6a - 6)(b - a) + 6a^2) + 108 > 0 \end{aligned}$$

となり、かつ $f(4) = 12((4a - 6)(b - a) + 4a^2) + 96$ は $a = 1$ のとき $b \rightarrow \infty$ とすると $f(4) \rightarrow -\infty$ 。すなわち

$$d \geq 5 \Rightarrow f(d) \geq 0$$

以上より $N = 9$ 。

Remark 5.9. (5.8) で、さらに X_d が minimal と仮定した場合、(3.8) (4) より $e \neq 1$ または $e = 1, b > a$ 。この場合は N をもう少し小さく取ることができる。

$e \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(7) &= 42((10a - 6)(b - ae) + a((5a - 3)e - 6)) + 132 \\ &\geq 42a(10a - 12) + 132 \geq 48 > 0 \\ f(6) &= 30((8a - 6)(b - ae) + a((4a - 3)e - 6)) + 120 \\ &\geq 30a(8a - 12) + 120 \geq 0 \end{aligned}$$

となり、かつ $f(5) = 20((6a - 6)(b - ae) + a((3a - 3)e - 6)) + 108$ は $b = ae, e = 2, a = 1$ のとき $f(5) = -12 < 0$ 。すなわち

$$d \geq 6 \Rightarrow f(d) \geq 0$$

$e = 1, b > a$ のとき

$$\begin{aligned} f(7) &= 42((10a - 6)(b - a - 1) + 5a^2 + a - 6) + 132 \geq 132 > 0 \\ f(6) &= 30((8a - 6)(b - a - 1) + 4a^2 - a - 6) + 120 \geq 90 > 0 \end{aligned}$$

となり、かつ $f(5) = 20((6a - 6)(b - a - 1) + 3a^2 - 3a - 6) + 108$ は $b = 2, a = 1$ のとき $f(5) = -12 < 0$ 。すなわち

$$d \geq 6 \Rightarrow f(d) \geq 0$$

$e = 0$ のときは (5.8) で調べた通り $d \geq 5 \Rightarrow f(d) \geq 0$ 。

以上より $N = 6$ 。

次は第4節で調べた Y が genus 1 以上の nonsingular irreducible curve C 上における decomposable ruled surface の場合において、 N がいくつになるかを調べてみる。

Remark 5.10. Y を genus $g \geq 1$ の nonsingular irreducible curve C 上の decomposable ruled surface $\mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\epsilon))$ 、 $D \equiv aC_0 + bF$ は ample かつ $|D| \neq \emptyset$ と仮定する。

Bertini の定理 ([1] II.Theorem 8.18) より $d \gg 0$ のとき $|dD|$ は nonsingular irreducible curve を持つため (Y, D) は条件 (5.1) を満たし、(2.7) より任意の $1 \leq i \leq d - 1$ に対し

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-iD)) = 0, D^2 > 0$$

しかしながら、この場合は全ての $d \geq 2$ に対して cyclic cover X_d が取得できる保証が無いため、十分大きな N の存在はわかっているが、具体的に値を求めることができない。

REFERENCES

- [1] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer, New York (1977).
- [2] Y.Kawamata, K.Matsuda and K.Matsuki, *Introduction to the minimal model Problem*, Advanced Studies in Pure Math. **10**(1985), 283–360.
- [3] W.Barth, C.Peters and A.Van de Ven, *Compact Complex Surface*, Springer, Berlin, Heidelberg (1984).
- [4] W.Fulton, *Intersection Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1984).
- [5] A.Beuville, *Complex Algebraic Surfaces*, London Math. Soc. Lecture Note Series **68**, Cambridge Univ. Press (1983).
- [6] A.Beuville, *L’application canonique pour les de type général*, Invent. Math. **55** (1979), 121–140.
- [7] Y.Miyaoka, *On the Chern Numbers of Surfaces of General Type*, Invent. Math. **42** (1977), 225–237.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING
WASEDA UNIVERSITY
3-4-1 OKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO 169-8555, JAPAN