

可換環における準素イデアル分解に関する考察

2014 年度 卒業論文

早稲田大学基幹理工学部数学科

1W100287-4

芹澤 麻衣子

指導教員： 楫元

2015 年 2 月 2 日

1. 序文

私は 2014 年度のセミナーを通して Northcott 著 *Ideal Theory* ([1]) の第 I 章と第 II 章を読んだ。その中で、私は(1)イデアルの準素イデアル分解、(2)イデアルの孤立成分、(3)極小素イデアルといったものが持つ性質、それらの間に成り立つ関係性に興味を持った。ここでは、上述の Northcott[1]の第 I 章の内容をもとに、いくつかの定理、特に正規分解の一意性に関する第一、第二定理を中心に言及しながら少しの考察を行いたい。また、この本の第 I 章と第 II 章を読むことを通して、私は複数の命題や定理から重要な事実を取り出すということについても学んだ。それについても、伏線として本文の中で触れるようにしたいと思う。本文中の Proposition、Theorem などは、すべて[1]からの引用である。

2. 定義など言葉の準備

はじめに、本文の中で用いる用語や概念について定義を与える。以下、 R として可換環を固定して考える。素イデアル、準素イデアルはともに R に等しくないことを定義に含める。

定義 1 (P 準素イデアル)

P を素イデアルとする。準素イデアル Q が $\text{Rad}Q = P$ を満たすとき、 Q を P 準素イデアルと呼ぶ。ただし、 $\text{Rad}Q$ はイデアル Q の根基イデアルを表す。

定義 2 (極小素イデアル)

I をイデアル、 P を素イデアルとする。 P が I の極小素イデアルであるとは、 $I \subset P$ であって、なおかつ、 $I \subset P'$ を満たす任意の素イデアル P' に対し、

$$P' = P \quad \text{または} \quad P' \subset P \text{ でない}$$

が成り立つこととして定義する。

定義 3 (準素イデアル分解、正規分解)

イデアル I が、各 i に対し Q_i を P_i 準素イデアルとして

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$$

という表示を持つとき、この式の右辺をイデアル I の準素イデアル分解と呼ぶ。各 Q_i をその分解の準素成分と呼ぶ。また、準素イデアル分解のうち、

- (1) 各準素成分に対応する素イデアル P_i がすべて相異なる
- (2) 各番号 i に対し、 Q_i は他の準素成分 Q_j たちの共通集合を含まない

の 2 条件を満たすものを、特に正規分解と呼ぶ。任意の準素イデアル分解から正規分解を構成する方法が存在する。

定義 4 (イデアルの孤立成分)

I をイデアル、 $S \subset R$ を積閉部分集合とする。このとき、

$$I_S := \{x \in R \mid \exists c \in S \text{ such that } cx \in I\}$$

で定義される集合 I_S を、 S によって定まる I の孤立成分、あるいは、 I の S -成分と呼ぶ。

I_S はイデアルをなす。

次に、次節以降の考察の中で引用することになる、準素イデアルに関するいくつかの補助命題を載せる (証明は略)。

Proposition 1

Q を P 準素イデアル とする。このとき、次の事実が成り立つ。

- (1) P は Q の極小素イデアルである。
- (2) 任意のイデアル I と J に対し、 $IJ \subset Q$ であり $I \subset P$ でないならば、 $J \subset Q$ が成り立つ。
- (3) 任意のイデアル I に対し、 $I \subset P$ でないならば $(Q : I) = Q$ が成り立つ。

ただし、 $(Q : I)$ はイデアル Q とイデアル I のイデアル商を表す。

Proposition 2

$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ がすべて P 準素イデアルであるとき、 $Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ もまた P 準素イデアルになる。

以下は、素イデアルに関する補助命題である。

Proposition 3

$I_1, I_2, \dots, I_n$ をイデアル、 P を素イデアルとする。このとき、 $I_1 I_2 \dots I_n \subset P$ ならば、ある番号 i ($1 \leq i \leq n$) が存在して $I_i \subset P$ が成り立つ。

Proposition 4

I をイデアル、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ を素イデアルとする。このとき、 $I \subset P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ ならば、ある番号 i ($1 \leq i \leq n$) が存在して $I \subset P_i$ が成り立つ。

3. イデアルの正規分解と極小素イデアル～分解一意性に関する第一定理～

Theorem 1 (イデアルの準素イデアル分解と極小素イデアルに関する定理)

イデアル I が

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$$

と準素イデアル分解されているとする。ただし、各 Q_i は P_i 準素イデアルとする。このとき、次が成り立つ。

(1) 任意の素イデアル P に対し、 $I \subset P$ であるならば、ある番号 i ($1 \leq i \leq n$) が存在して $P_i \subset P$ が成り立つ。

(2) I の極小素イデアルは $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ のうち、 i と異なる任意の番号 j ($1 \leq j \leq n$) に対し、 $P_j = P_i$ であるか $P_j \subset P_i$ でない、のいずれかを成立せしめるものである。

(3) $\text{Rad} I = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n$

である。さらに正確には、 I の極小素イデアル全体を $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ で表すなら、

$$\text{Rad} I = P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_r}$$

pf (1) 素イデアル P が $I \subset P$ を満たすとする。

$$\Rightarrow Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n \subset P$$

$$\Rightarrow Q_1 Q_2 \cdots Q_n \subset Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n \subset P$$

$$\Rightarrow 1 \leq i \leq n \text{ such that } Q_i \subset P \quad (\text{Proposition 3 より})$$

一方、 P_i は Q_i の極小素イデアルだから (Proposition 1-(1))、上記 i について、

$$P_i \subset P .$$

(2) $\text{Min} := \{P_i \mid 1 \leq i \leq n : \forall j \neq i \Rightarrow (P_j = P_i \text{ であるか } P_j \subset P_i \text{ でない})\}$ とする。

(1)は、 I の極小素イデアルが $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ の中に存在することを保証している。

$P_i \in \text{Min}$ なら、 P_i は I の極小素イデアルになっている。逆に $P_i \in \text{Min}$ でないなら、 P_i は I の極小素イデアルでない。すなわち、 Min が I の極小素イデアル全体を与える。

(3) $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$

$$\Rightarrow \text{Rad} I = \text{Rad}(Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n) = \text{Rad} Q_1 \cap \text{Rad} Q_2 \cap \cdots \cap \text{Rad} Q_n$$

$$= P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n .$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$ のうち、相異なる任意の i と j に対し、

$$P_i \neq P_j \text{ であつ } P_i \subset P_j \text{ であるならば } P_j \text{ を省く}$$

という処理を行うと、 Min の要素が残る。(2)より、これは I の極小素イデアル全体に等しく、 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ と書けば、

$$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n = P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_r} .$$

Theorem 2 (正規分解の一意性に関する第一定理)

イデアル I を準素イデアル分解可能なイデアルとする。また、

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_n$$

を I の二通りの正規分解とする。ただし、 Q_i は P_i 準素イデアル、 Q'_j は P'_j 準素イデアルである。このとき、 $m = n$ かつ、 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\} = \{P'_1, P'_2, \dots, P'_n\}$ である。

pf $m + n$ 個の素イデアル

$$P_1, P_2, \dots, P_m, P'_1, P'_2, \dots, P'_n$$

のうち、他のいずれにも真に含まれないようなものを一つ選ぶ。選ばれたのが P_m だったとする。

claim $P_m \in \{P'_1, P'_2, \dots, P'_n\}$

$\because P_m$ は $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ のいずれにも真に含まれないから、

$$P_m \subset P'_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \dots (*)$$

を示せば $P_m = P'_j$ が従う。さらに、 $(*)$ は

$$Q_m \subset P'_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \dots (**)$$

から従う (Proposition 1-(1))。よって $(**)$ を示す。背理法による。

$$Q_m \subset P'_j \text{ でない } (1 \leq j \leq n)$$

と仮定する。

$$\Rightarrow (Q'_j : Q_m) = Q'_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad (\text{Proposition 1-(3)より})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (I : Q_m) &= (Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_n) : Q_m \\ &= (Q'_1 : Q_m) \cap (Q'_2 : Q_m) \cap \cdots \cap (Q'_n : Q_m) \\ &= Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_n = I. \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

一方、 P_m は $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ のいずれにも真に含まれず、かつ、正規分解の条件から、そのいずれとも異なる。よって

$$\begin{aligned} P_m \subset P_i \text{ でない } (1 \leq i \leq m-1) \\ \Rightarrow Q_m \subset P_i \text{ でない } (1 \leq i \leq m-1) \quad (\text{Proposition 1-(1)より}) \\ \Rightarrow (Q_i : Q_m) = Q_i \quad (1 \leq i \leq m-1) \quad (\text{Proposition 1-(3)より}) \end{aligned}$$

また、 $(Q_m : Q_m) = R$ 。これらを合わせることで、

$$\begin{aligned} (I : Q_m) &= (Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m) : Q_m \\ &= (Q_1 : Q_m) \cap (Q_2 : Q_m) \cap \cdots \cap (Q_m : Q_m) \\ &= Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1} \cap R = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1}. \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②により、 $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1}$ を得るが、これは初めの分解が正規であったことに反する。よって、 $P_m \in \{P'_1, P'_2, \dots, P'_n\}$ である。

たとえば、 $P_m = P'_n$ だったとする。 $P := P_m = P'_n$ とおく。

claim $Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1} = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_{n-1}$

$\therefore Q := Q_m \cap Q'_n$ とおく。Q は P 準素イデアルである (Proposition 2)。

$$P \subset P_i \text{ でない } (1 \leq \forall i \leq m-1)$$

$$\Rightarrow Q \subset P_i \text{ でない } (1 \leq \forall i \leq m-1)$$

$$\Rightarrow (Q_i : Q) = Q_i \text{ } (1 \leq \forall i \leq m-1)$$

また、 $Q \subset Q_m$ により、 $(Q_m : Q) = R$ 。以上を合わせて、

$$\begin{aligned} (I : Q) &= (Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m) : Q \\ &= (Q_1 : Q) \cap (Q_2 : Q) \cap \cdots \cap (Q_m : Q) \\ &= Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1} \cap R = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1} . \end{aligned}$$

もう一つの分解 $I = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_n$ についても同様にして

$$(I : Q) = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_{n-1}$$

を得る。これにより、 $Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1} = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_{n-1}$ となる。

ここまでの議論を $Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-1} = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_{n-1}$ について行うことで

$$Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m-2} = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_{n-2}$$

を得ることができ、以下、この作業を繰り返す。

$m = n$ については次のように考える。 $m \neq n$ 、たとえば、 $m < n$ とすると、 m 回後に

$$R = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \cdots \cap Q'_{n-m}$$

を得るが、各 i について $Q'_i \neq R$ だからこれは不合理。よって $m = n$ である。

考察

可換環における準素イデアル分解可能なイデアルの正規分解については、よく知られているように、準素成分の一意性が成り立たない。しかし、完全な一意性は成り立たなくとも、どの程度の一意性が保証されるかを調べることはできる。Theorem 2 は、正規分解における準素成分の個数と、準素成分に対応する素イデアル全体の集合は、分解の方法によらず、初めに与えたイデアルごとに一意に定まることを示している。この一意性により、後者の素イデアルたちのことを、「イデアル I に属する素イデアル」と呼び特定することが可能になる。正規分解の準素成分の多意性と、対応する素イデアルの一意性 (Theorem 2) との間のギャップを説明するのは、素イデアル P を根基イデアルに持つ準素イデアルは一つに限らないという事実である。また、Theorem 1-(3)において、イデアル I の根基イデアル ($\text{Rad}I$) は I に属する素イデアルの共通集合で表されているが、これは $\text{Rad}I$ の準素イデアル分解でもある。そして、後半のイデアル I の極小素イデアル全体の共通集合による表示が $\text{Rad}I$ の正規分解である。この正規分解は準素成分がすべて素イデアルなので、Theorem 2 に照らすと、 $\text{Rad}I$ の正規分解は一意的であることがわかる。つまり、イデアル I の段階では正規分解の一意性は保証されなくとも、その根基をとると、正規分解は一意的となる。Theorem 1 はまた、準素イデアル分解可能なイデアルの極小

素イデアルに関しても重要な事実を述べている。**Proposition 1-(1)**にあるように、 P 準素イデアル Q の極小素イデアルと根基イデアルはともに P であったが、準素イデアル分解可能なより一般のイデアル I の極小素イデアルは I に属する素イデアルの中に存在し、 I の根基イデアルは I の極小素イデアルすべての共通集合をとったものになる。そしてまた、準素イデアル分解可能なイデアルの極小素イデアルは高々有限個であることも、

Theorem 1 からわかる。ここでは最後に、素イデアル P と P 準素イデアル Q との間に成り立つ密接な関係について観察したい。**Theorem 2** の証明において、**Proposition 1-(3)** を繰り返し用いた。これは、素イデアル P とイデアル I との間に課された条件から P 準素イデアル Q とイデアル I との間に成り立つ関係が規定されるという内容の命題である

(「任意のイデアル I に対し、 $I \subset P$ でないならば $(Q : I) = Q$ が成り立つ。」。この性質から直接に、二つ正規分解があった場合に、準素成分に対応する素イデアルの集合は両者で一致しなければならないという結論が導かれている。

4. イデアルの正規分解とイデアルの孤立成分～分解一意性に関する第二定理～

Theorem 3 (イデアルの孤立成分の準素イデアル分解)

イデアル I が

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$$

と準素イデアル分解されているとする。ただし、 Q_i は P_i 準素イデアルである。また、 $S \subset R$ を積閉部分集合とし、 $1 \leq i \leq m$ なる各 i に対して $P_i \cap S = \emptyset$ 、 $m+1 \leq i \leq n$ なる各 i に対して $P_i \cap S \neq \emptyset$ を満たすとする。このとき、

$$I_S = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m$$

が成り立つ。

pf (C) 任意の $x \in I_S$ をとる。

$$\Rightarrow cx \in I \quad (\exists c \in S)$$

$1 \leq i \leq m$ なる各 i に対して、

$$cx \in Q_i \text{ かつ } c \in P_i \text{ でない}$$

$$\Rightarrow x \in Q_i \quad (\text{Proposition 1-(2)})$$

よって $x \in Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m$ を得る。

(D) 任意の $x \in Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m$ をとる。 $m+1 \leq i \leq n$ なる各 i に対し、

$$c_i \in P_i \cap S$$

を一つとる。

$$\Rightarrow c_i^{l_i} \in Q_i \quad (\exists l_i: \text{正整数})$$

$L := \max\{l_{m+1}, l_{m+2}, \dots, l_n\}$, $c := c_{m+1}c_{m+2} \cdots c_n$ とおくと、

$$c^L \in Q_{m+1} \cap Q_{m+2} \cap \cdots \cap Q_n$$

$$\Rightarrow c^L x \in (Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_m) \cap (Q_{m+1} \cap Q_{m+2} \cap \cdots \cap Q_n) = I.$$

ここで、 S は積閉より、 $c^L \in S$ であることに注意すると、 $x \in I_S$ である。

定義 5 (素イデアルの孤立集合)

イデアル I を準素イデアル分解可能なイデアルとし、

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$$

を I の正規分解の一つとする。ただし、 Q_i は P_i 準素イデアルである。このとき、

$\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ の部分集合 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ が I に属する素イデアルの孤立集合であるとは、任意の番号 j ($1 \leq j \leq n$) と任意の番号 k ($1 \leq k \leq r$) に対し、

$$P_j \subset P_{i_k} \text{ ならば } P_j \in \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$$

が成り立つことと定義する。

Theorem 4 (正規分解の一意性に関する第二定理)

イデアル I を準素イデアル分解可能なイデアルとし、

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$$

を I の正規分解の一つとする。ただし、 Q_i は P_i 準素イデアルである。 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ を I に属する素イデアルの孤立集合とすると、対応する準素成分の共通集合 $Q_{i_1} \cap Q_{i_2} \cap \cdots \cap Q_{i_r}$ は $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$ によってのみ決まり、各正規分解に関して不変である。

pf $S := (R - P_{i_1}) \cap (R - P_{i_2}) \cap \cdots \cap (R - P_{i_r})$ とする。まず、 S が積閉となることに注意する (素イデアルの補集合の積集合)。 $P_j \in \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ でないとする。

$$\Rightarrow P_j \subset P_{i_k} \text{ でない } (1 \leq \forall k \leq r)$$

ここで、 $P_j \cap S = \emptyset$ ならば、

$$P_j \subset (R - S) = P_{i_1} \cup P_{i_2} \cup \cdots \cup P_{i_r} \quad (\text{Proposition 4 より})$$

$$\Rightarrow P_j \subset P_{i_k} \quad (1 \leq \exists k \leq r)$$

となり、今の状況に反するから、 $P_j \cap S \neq \emptyset$ がわかる。

$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$ と S に関して、Theorem 3 を適用して

$$I_S = Q_{i_1} \cap Q_{i_2} \cap \cdots \cap Q_{i_r}$$

この式は、右辺がイデアル I と集合 S によって確定することを示している。つまり、素イデアルの孤立集合 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ の取り方のみに依存する。

考察

Theorem 4 は Theorem 2 の内容を踏まえた上で、いったん素イデアルのレベルに持ち上げた議論をもう一度、正規分解の準素成分のレベルに戻して、そこで成り立つ一意性を考察している。ここでの結論は、イデアル I に属する素イデアルのうち、「孤立集合」という特定の条件を満たす素イデアルの集合に着目すれば、それに対応する準素成分の共通集合は一意的に定まる、というものである。ここから、いくつかの具体的な事実が導かれる。

Corollary 1 準素イデアル分解可能なイデアル I の正規分解において I の極小素イデアルに対応する準素成分は一意に定まる。

これは、 I の極小素イデアル一つ一つが「孤立集合」の定義を満たすことから従う。

Corollary 2 準素イデアル分解可能なイデアル I の S -成分の正規分解は一意に定まる。

これは、 R の積閉部分集合 S を与えたとき、 I に属する素イデアルのうち、 S と交わらないものすべての集合が「孤立集合」の定義を満たすことから従う。

謝辞

約一年半の間、毎週のセミナーで指導教員である楫先生に大変お世話になりました。毎回セミナーの発表の場で先生にいただく質問と指摘は勉強を進める上での大きな指針となりました。先生のご指導に対し、ここに改めて、心から感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Northcott,D.G. Ideal Theory. Cambridge University Press (1953).