

方程式の根の配置と係数の代数的条件

楫研究室所属 学部 4 年
1W070246-3 桜井佑樹

平成 23 年 2 月 7 日

1 動機と問題提起

私は方程式の根の複素平面上での配置と、元の方程式の係数がみたす代数的な条件との関係に興味を持ち、その関係を調べた。たとえば 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根が複素平面上で正三角形をなす必要十分条件は $a^2 - 3b = 0$ が成り立つことである。そこでこの条件を拡張して、 n 次方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ の根が複素平面上で正 n 角形をなす場合、および 3 次方程式の根が二等辺三角形をなす場合には係数にどのような条件が課せられるのかを考察した。

2 結論

根が正角形をなす場合には、元の方程式の係数が満たす条件を必要十分で求めることができた。根が二等辺三角形をなす場合には、条件を係数だけで記述することはできなかったが、あるパラメータ m と係数を用いて必要十分条件を求めることができた。

定理 1

$f = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$ ($n \geq 3$) を考える。
方程式 $f = 0$ の根が複素平面上で正 n 角形をなすための必要十分条件は

$$\begin{cases} a_2 &= {}_nC_2 \left(\frac{a_1}{n}\right)^2 \\ a_3 &= {}_nC_3 \left(\frac{a_1}{n}\right)^3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= {}_nC_{n-1} \left(\frac{a_1}{n}\right)^{n-1} \end{cases}$$

が成立することである。

ただしここでの正 n 角形には、複素平面上で 1 点となる場合も含める。

定理 2

$f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ を考える.

$f = 0$ の根が複素平面上で二等辺三角形をなすための必要十分条件は, ある $m \in \mathbb{R}_{> \frac{1}{4}} = \{n \in \mathbb{R} | n > 1/4\}$ が存在して, $g_0 = 0$ が成立することである. ただし,

$$\begin{aligned} g_0 = & -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 + 3a^2b^2m - 12b^3m - 12a^3cm + 54abcm \\ & - 81c^2m + a^6m^2 - 9a^4bm^2 + 24a^2b^2m^2 - 15b^3m^2 + 12a^3cm^2 - 54abcm^2 \\ & + 81c^2m^2 + a^2b^2m^3 - 4b^3m^3 - 4a^3cm^3 + 18abcm^3 - 27c^2m^3. \end{aligned}$$

またここでいう二等辺三角形には, 複素平面上で 1 点となる場合も含める.

補題

α, β, γ が複素平面上で γ を頂点とする二等辺三角形をなすことと次は同値. ある $m \in \mathbb{R}_{> \frac{1}{4}}$, ある $s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = t(\beta - \alpha) \\ st = m \end{cases}$$

が成立する.

この補題において, $m = 1$ のとき α, β, γ は正三角形をなす.

$m = 1/4$ では α, β, γ は常に一直線上にあり m の値によってそれぞれの位置関係が変わる. とくに $m = 1/4$ のとき, 二等辺三角形の頂点が底辺に乗った形で α, β, γ は一直線になる. また定理 2 において, $g_0(a, b, c, m)$ に $m = 1$ を代入すると,

$$g_0(a, b, c, 1) = (a^2 - 3b)^3$$

となり, $f = 0$ の根が複素平面上で正三角形をなすための必要十分条件

$$(a, b, c) \in V(a^2 - 3b) \subseteq \mathbb{C}^3$$

に一致する.

参考文献

D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer, 1996.