

方程式の根の配置と 係数の代数的条件

楫研究室 学部4年

1W070246-3 桜井佑樹

研究動機

私は方程式の根の複素平面上での配置と、
元の方程式の係数がみたす代数的な条件との
関係に興味を持ち、その関係を調べた。

- 簡単な例として...

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根が
複素平面上で正三角形をなす
 $\Leftrightarrow a^2 - 3b = 0$ が成立.

例から拡張して

- $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ の根が
正n角形をなす場合
- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根が
二等辺三角形をなす場合 を調べた.

結論

- 正 n 角形の場合において, 係数が満たす条件を必要十分で求めることができた.
- 二等辺三角形の場合は,
係数とあるパラメータ m を用いて必要十分条件を記述できた.

定理1

$$f = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x] \quad (n \geq 3)$$

を考える. 方程式 $f = 0$ の根が

正 n 角形をなすための必要十分条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = {}_n C_2 \left(\frac{a_1}{n} \right)^2 \\ a_3 = {}_n C_3 \left(\frac{a_1}{n} \right)^3 \\ \vdots \\ a_{n-1} = {}_n C_{n-1} \left(\frac{a_1}{n} \right)^{n-1} \end{array} \right. \quad \text{が成立すること.}$$

定理2

$f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ を考える.

$f = 0$ の根が二等辺三角形をなすための
必要十分条件は, ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}} = \{n \in \mathbb{R} | n > 1/4\}$
が存在して $g_0 = 0$ が成立すること. ただし,

$$\begin{aligned} g_0 = & -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 + 3a^2b^2m - 12b^3m - 12a^3cm + 54abcm \\ & - 81c^2m + a^6m^2 - 9a^4bm^2 + 24a^2b^2m^2 - 15b^3m^2 + 12a^3cm^2 - 54abcm^2 \\ & + 81c^2m^2 + a^2b^2m^3 - 4b^3m^3 - 4a^3cm^3 + 18abcm^3 - 27c^2m^3. \end{aligned}$$

証明のための補題

α, β, γ が複素平面上で γ を頂点とする二等辺三角形をなすことと次は同値.

ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$, ある $s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = t(\beta - \alpha) \\ st = m \end{cases}$$

が成立する.

- パラメータ m について

$m = 1$ のとき α, β, γ は正三角形をなす.

$m \leq 1/4$ では α, β, γ は常に一直線上にあり,
 m の値によってそれぞれの位置関係が変わる.

とくに $m = 1/4$ のとき二等辺三角形の頂点が
底辺に乗った形で α, β, γ は一直線になる.

定理2の証明 概略1

方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根を α, β, γ とおく. 根と係数の関係から,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}$$

これと補題を合わせて次のイデアル I を考える

$$I = \left\langle \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma + a, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - b, \alpha\beta\gamma + c, \\ \gamma - \alpha - s(\beta - \alpha), \beta - \gamma - t(\beta - \alpha), st - m \end{array} \right\rangle$$

定理2の証明 概略2

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根 α, β, γ が
二等辺三角形をなす

$$\iff (\alpha, \beta, \gamma, s, t, a, b, c, m) \in V(I)$$

イデアル I のグレブナー基底を計算することで
 $\alpha, \beta, \gamma, s, t$ を消去し求める g_0 を得る.

まとめ

- 定理1
根が正n角形 $\iff \begin{cases} a_2 &= {}_nC_2 \left(\frac{a_1}{n}\right)^2 \\ a_3 &= {}_nC_3 \left(\frac{a_1}{n}\right)^3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= {}_nC_{n-1} \left(\frac{a_1}{n}\right)^{n-1} \end{cases}$

- 定理2

根が二等辺三角形 $\iff g_0 = 0$

$$\begin{aligned} g_0 = & -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 + 3a^2b^2m - 12b^3m - 12a^3cm + 54abcm \\ & - 81c^2m + a^6m^2 - 9a^4bm^2 + 24a^2b^2m^2 - 15b^3m^2 + 12a^3cm^2 - 54abcm^2 \\ & + 81c^2m^2 + a^2b^2m^3 - 4b^3m^3 - 4a^3cm^3 + 18abcm^3 - 27c^2m^3. \end{aligned}$$