

方程式の根の配置と係数の代数的条件

2010 年度卒業論文

早稲田大学基幹理工学部数学科

1W070246-3

桜井佑樹

指導教員名 楫元

平成 23 年 2 月 6 日

目 次

1	序文	2
2	n 次方程式の根が 正 n 角形をなすための係数の条件	3
3	3 次方程式の根が 二等辺三角形をなすための係数の条件	5
4	謝辞	12
5	参考文献	12

1 序文

私は方程式の根の複素平面上での配置と、元の方程式の係数が満たす代数的な条件との関係に興味を持ち、その関係を調べた。ここでの代数的な条件とは、多項式の零点集合で表記できるという意味である。たとえば3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根が複素平面上で正三角形をなす必要十分条件は $a^2 - 3b = 0$ が成り立つことである。この正三角形の例を拡張して、次にあげる二つの例について元の方程式の係数が満たす代数的な条件を求めようと考えた。一つ目は、 n 次方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ の根が複素平面上で正 n 角形をなす場合、二つ目は3次方程式の根が二等辺三角形をなす場合である。

結果、 n 次方程式の根が正 n 角形をなす場合については、係数が満たす条件を必要十分で求めることができた。2章でこれについてまとめた。3次方程式の根が二等辺三角形をなす場合については、その条件を係数のみからなる多項式の零点集合で表すことはできなかったが、係数に加えてパラメータ m を用いることで記述できた。3章でこれについて書いた。

2 n 次方程式の根が 正 n 角形をなすための係数の条件

定理 1

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$ ($n \geq 3$) を考える. 方程式 $f = 0$ の根が複素平面上で正 n 角形をなすための必要十分条件は

$$\begin{cases} a_2 &= {}_nC_2 \left(\frac{a_1}{n}\right)^2 \\ a_3 &= {}_nC_3 \left(\frac{a_1}{n}\right)^3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= {}_nC_{n-1} \left(\frac{a_1}{n}\right)^{n-1} \end{cases}$$

が成立することである. ただしここでの正 n 角形には, 複素平面上で 1 点となる場合も含める.

定理 1 の証明

$f = 0$ の根を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ とおく.

まず $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が正 n 角形をなすと仮定しよう.

仮定から, ある $\alpha \in \mathbb{C}$, ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$, ある $\theta \in [0, 2\pi]$ が存在して,
(必要であれば添数を並べ換えて,)

$$\alpha_k = \alpha + \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}i\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とかくことができる.

ここから, α_k は $(x - \alpha)^n - re^{i\theta} = 0$ の根である.

また α_k は $f = 0$ の根でもあった.

したがって

$$(x - \alpha)^n - re^{i\theta} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = f.$$

よって上式の両辺の係数を比較すれば

$$\begin{cases} a_2 &= {}_nC_2 \left(\frac{a_1}{n}\right)^2 \\ a_3 &= {}_nC_3 \left(\frac{a_1}{n}\right)^3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= {}_nC_{n-1} \left(\frac{a_1}{n}\right)^{n-1} \end{cases}$$

となる.

逆を示そう.

$\frac{a_1}{n} = \alpha$ とおく. ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$, ある $\theta \in [0, 2\pi]$ によって,

$$a_n - \alpha^n = -re^{i\theta}$$

とかけるので,

$$f = (x - \alpha)^n - re^{i\theta}$$

となる. したがって, $f = 0$ の根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は

$$\alpha_k = \alpha + \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}i\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とかけ, 正 n 角形となることが分かる. $\square$

定理 1 でとくに $n = 3$ とすれば, 係数の条件は

$$a_2 = {}_3C_2 \left(\frac{a_1}{3}\right)^2 = \frac{a_1^2}{3}$$

となり, 冒頭の根が正三角形をなすための条件に帰着する. この定理で a_n に条件が見つからないのは, 定数項 a_n が平行移動の意味をもっているからである.

3 3 次方程式の根が 二等辺三角形をなすための係数の条件

この章での二等辺三角形には, 複素平面上で 1 点となる場合も含める.

定理 2

$f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ を考える. $f = 0$ の根が複素平面上で二等辺三角形をなすための必要十分条件は, ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}} = \{n \in \mathbb{R} | n > 1/4\}$ が存在して, $g_0 = 0$ が成立することである. ただし,

$$\begin{aligned} g_0 = & -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 + 3a^2b^2m - 12b^3m - 12a^3cm + 54abcm \\ & - 81c^2m + a^6m^2 - 9a^4bm^2 + 24a^2b^2m^2 - 15b^3m^2 + 12a^3cm^2 - 54abcm^2 \\ & + 81c^2m^2 + a^2b^2m^3 - 4b^3m^3 - 4a^3cm^3 + 18abcm^3 - 27c^2m^3. \end{aligned}$$

定理を示すため $f = 0$ の根を α, β, γ とおく. α, β, γ に区別はないから, 以降とくに γ を二等辺三角形の頂点として考える. まず次の補題を示す.

補題

α, β, γ が複素平面上で γ を頂点とする二等辺三角形をなすことと次は同値. ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$, ある $s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = t(\beta - \alpha) \\ st = m \end{cases}$$

が成立する.

補題の証明

まず α, β, γ が複素平面上で γ を頂点とする二等辺三角形をなすと仮定しよう.

$$\begin{aligned} \angle \alpha \beta \gamma &= \angle \gamma \beta \alpha = \theta \\ |\gamma - \alpha| &= |\gamma - \beta| = r |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

とおく. $s = re^{i\theta}$, $t = re^{-i\theta}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha &= s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma &= t(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

とかけ, $st = r^2$ となる. また, 三角形の二辺の和は他の一辺より大きいから,

$$|\alpha - \beta| < |\gamma - \alpha| + |\gamma - \beta|$$

すなわち

$$|\alpha - \beta| < 2r |\alpha - \beta|.$$

したがって $r^2 > \frac{1}{4}$ となり示せた.

逆を示そう. α, β, γ が相異なるときを示せば十分.

まず α, β, γ が一直線上にないことを示す. 一直線上にあるとすると, ある $k, l \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = k(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = l(\beta - \alpha) \end{cases}$$

とかける. よって $k + l = 1$ が成り立つ.

また仮定から, ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$ があって, $kl = m$ が成立. したがって,

$$\begin{cases} k + l = 1 \\ kl = m \end{cases}$$

より

$$l^2 - l + m = 0.$$

ここでこの l についての 2 次方程式の判別式 $D = 1 - 4m < 0$ から, $l \in \mathbb{R}$ に矛盾. したがって α, β, γ は一直線上にはない.

α, β, γ が三角形を作ることが分かった. この三角形が γ を頂点とする二等辺三角形であることを示す. 仮定の $s, t \in \mathbb{C}$ より, ある $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, ある $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ が存在して,

$$\begin{aligned} s &= r_1 e^{i\theta_1} \\ t &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

とかける.

$\theta_1 \in (-\pi, 0)$ のとき

$$st = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = m$$

より, $\theta_1 + \theta_2 = 0$ または $-\pi$.

ここで $\theta_1 + \theta_2 = -\pi$ とすると, $st = -r_1 r_2 = m < 0$ となり仮定に矛盾. したがって $\theta_1 + \theta_2 = 0$.

$\theta_1 \in (0, \pi)$ のときも同様に $\theta_1 + \theta_2 = 0$ が示せる.

以上よりいずれの場合も $\theta_1 = -\theta_2$ となり, α, β, γ は γ を頂点とする二等辺三

角形となる. $\square$

ここで補題の補足をしておく. 補題において, s, t は三角形のある一辺と他の 2 辺との角度と長さの倍率を表している. その s と t の積が実数になることが三角形の二つの角度が等しいことに対応し, m の値が底辺と他の二辺との倍率に対応しているのである. 例えば $m = 3$ として, 既知の複素数 α, β, γ に対してある $s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = t(\beta - \alpha) \\ st = m = 3 \end{cases}$$

が成り立ったとする. このとき α, β, γ は二等辺三角形であって, その辺の長さの関係は $|\alpha - \beta| = \sqrt{3}|\gamma - \alpha| = \sqrt{3}|\gamma - \beta|$ となっているのである.

補題の証明からわかるように, m についている $1/4$ という数字は α, β, γ が一直線にならずに三角形をつくるために必要な条件である. m の範囲を実数としたときは, α, β, γ が一直線上にあることを補題の証明と同様にして示せるが, 三角形をつくるとは限らない. 3 点が三角形となるか直線につぶれるかの境界が $m = 1/4$ なのである. $m = 1/4$ では頂点が底辺の内分点, 外分点として m の値によりその位置を変えながら 3 点は一直線の関係を保つ. 例として, 既知の複素数 α, β, γ に対してある $s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = t(\beta - \alpha) \\ st = -2 \end{cases}$$

が成立したとしよう. このとき α, β, γ は一直線上にあつて, γ は線分 $\alpha\beta$ を $1:2$ に外分している. とくに $m = 1/4$ のときは二等辺三角形の頂点が底辺に乗った形で 3 点が一直線上となり, γ は線分 $\alpha\beta$ の中点となっている.

この補題により定理 2 は次のように示せる.

定理 2 の証明

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の根を α, β, γ とするとき, 根と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}$$

が成立する. これと補題より $f = 0$ の根が複素平面上で二等辺三角形をなすことの必要十分条件は, ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$, ある $\alpha, \beta, \gamma, s, t \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \\ \gamma - \alpha = s(\beta - \alpha) \\ \beta - \gamma = t(\beta - \alpha) \\ st = m \end{cases}$$

が成り立つことである.

ここで $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma, s, t, a, b, c, m]$ 上のイデアル I を

$$I = \langle \alpha + \beta + \gamma + a, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - b, \alpha\beta\gamma + c, \gamma - \alpha - s(\beta - \alpha), \beta - \gamma - t(\beta - \alpha), st - m \rangle$$

で定めれば, $f = 0$ の根が複素平面上で二等辺三角形をなすことと次は同値.

ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$, ある $\alpha, \beta, \gamma, s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$(\alpha, \beta, \gamma, s, t, a, b, c, m) \in V(I).$$

ただし $V(I) = \{x \in \mathbb{C}^9 \mid f(x) = 0 \ (\forall f \in I)\}$.

ここで I のグレブナー基底を計算すると, 次の $g_0, g_1, \dots, g_{26}$ が導かれる.

$$\begin{aligned}
g_0 &= -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 + 3a^2b^2m - 12b^3m - 12a^3cm \\
&\quad + 54abcm - 81c^2m + a^6m^2 - 9a^4bm^2 + 24a^2b^2m^2 - 15b^3m^2 \\
&\quad + 12a^3cm^2 - 54abcm^2 + 81c^2m^2 + a^2b^2m^3 - 4b^3m^3 - 4a^3cm^3 \\
&\quad + 18abcm^3 - 27c^2m^3, \\
g_1 &= b^3m - 27c^2m - b^3t + 27c^2t + b^3t^2 - 27c^2t^2, \\
g_2 &= -b^2m + 3acm + b^2t - 3act - b^2t^2 + 3act^2, \\
g_3 &= abm - 9cm - abt + 9ct + abt^2 - 9ct^2, \\
g_4 &= a^2m - 3bm - a^2t + 3bt + a^2t^2 - 3bt^2, \\
g_5 &= -b^3 + 27c^2 + b^3s - 27c^2s + b^3t - 27c^2t, \\
g_6 &= b^2 - 3ac - b^2s + 3acs - b^2t + 3act, \\
g_7 &= -ab + 9c + abs - 9cs + abt - 9ct, \\
g_8 &= -a^2 + 3b + a^2s - 3bs + a^2t - 3bt, \\
g_9 &= -m + st, \\
g_{10} &= ab^3 - 4a^2bc + 15b^2c - 36ac^2 - 2ab^3m + 12a^2bcm - 45b^2cm + 81ac^2m \\
&\quad - a^5bm^2 + 6a^3b^2m^2 - 8ab^3m^2 - 9a^4cm^2 + 42a^2bcm^2 - 36b^2cm^2 \\
&\quad - 54ac^2m^2 + 4a^2bcm^3 - 15b^2cm^3 + 9ac^2m^3 + 2b^3z - 54c^2z \\
&\quad - 3b^3mz + 81c^2mz + b^3m^3z - 27c^2m^3z, \\
g_{11} &= -ab^2 + 4a^2c - 3bc + 2ab^2m - 9a^2cm + 9bcm + a^5m^2 - 6a^3bm^2 \\
&\quad + 8ab^2m^2 + 6a^2cm^2 - 9bcm^2 - a^2cm^3 + 3bcm^3 \\
&\quad - 2b^2z + 6acz + 3b^2mz - 9acmz - b^2m^3z + 3acm^3z, \\
g_{12} &= 4b^2 - 12ac + a^2bm - 12b^2m + 27acm - 3a^4m^2 + 16a^2bm^2 - 15b^2m^2 \\
&\quad - 18acm^2 + a^2bm^3 - 4b^2m^3 + 3acm^3 + 2abz - 18cz \\
&\quad - 3abmz + 27cmz + abm^3z - 9cm^3z, \\
g_{13} &= ab - 9c + a^3m - 4abm + 9cm + 2a^2z - 6bz + a^2mz - 3bmz, \\
g_{14} &= 3a^2b - 2b^2 - 21ac + 3a^4m - 14a^2bm + 7b^2m + 24acm - a^2bm^2 \\
&\quad + 4b^2m^2 - 3acm^2 + 6a^3z - 19abz + 9cz + 2abmz \\
&\quad - 18cmz - abm^2z + 9cm^2z, \\
g_{15} &= am - at + at^2 + 3mz - 3tz + 3t^2z, \\
g_{16} &= -a + as + at - 3z + 3sz + 3tz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{17} &= -b - a^2m + 4bm - 2az + 2amz - 3z^2 + 3mz^2, \\
g_{18} &= -b^2 + 3ac - a^2bm + 4b^2m - 3acm + abz - 9cz - abmz + 9cmz + 3a^2z^2 - 9bz^2, \\
g_{19} &= c + bz + az^2 + z^3, \\
g_{20} &= 2am - at - y + 4my + z + 2mz - 3tz, \\
g_{21} &= 3a^2b - 42b^2 + 99ac - 9a^4m + 48a^2bm - 45b^2m - 54acm + 3a^2bm^2 \\
&\quad - 12b^2m^2 + 9acm^2 + 6a^4t - 36a^2bt + 86b^2t - 96act + 15a^4mt \\
&\quad - 82a^2bmt + 83b^2mt + 84acmt - 5a^2bm^2t + 20b^2m^2t - 15acm^2t \\
&\quad + 6a^3y - 27aby + 81cy - 12abz + 108cz + 3abm^2z - 27cm^2z + 16abtz \\
&\quad - 144ctz - 2abmtz + 18cmtz - 5abm^2tz + 45cm^2tz, \\
g_{22} &= at - y + 2ty + z + tz, \\
g_{23} &= -2a + 2as - at - 3y + 6sy - 3z - 3tz, \\
g_{24} &= 2b + a^2t - 4bt + ay + 3az - 2atz + 3yz + 3z^2 - 3tz^2, \\
g_{25} &= b - a^2t + 4bt + 2ay + 3y^2 + 2atz + 3tz^2, \\
g_{26} &= a + x + y + z.
\end{aligned}$$

よって $f = 0$ の根が複素平面上で二等辺三角形をなすと仮定すれば, ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$, ある $\alpha, \beta, \gamma, s, t \in \mathbb{C}$ が存在して

$$(\alpha, \beta, \gamma, s, t, a, b, c, m) \in V(I) = V(g_0, g_1, \dots, g_{26}).$$

したがって, ある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$ が存在して

$$(a, b, c, m) \in V(g_0)$$

が成立する.

逆にある $m \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{4}}$ が存在して

$$(a, b, c, m) \in V(g_0)$$

が成り立つとする.

g_4 に注目すれば, 拡張定理より $a^2 - 3b \neq 0$ のとき, ある $t \in \mathbb{C}$ があって

$$(t, a, b, c, m) \in V(I \cap \mathbb{C}[t, a, b, c, m]).$$

同様に繰り返していくと $a^2 - 3b \neq 0$ のとき, ある $\alpha, \beta, \gamma, s, t \in \mathbb{C}$ があって

$$(\alpha, \beta, \gamma, s, t, a, b, c, m) \in V(I).$$

したがって $f = 0$ の根は複素平面上で二等辺三角形をなす.

$a^2 - 3b = 0$ のときは $f = 0$ の根が複素平面上で正三角形をなすことが分かっているから、いずれの場合も根は二等辺三角形をなす。
以上から定理が示せた。 $\square$

定理 2 において, $g_0(a, b, c, m)$ に $m = 1$ を代入すると,

$$g_0(a, b, c, 1) = (a^2 - 3b)^3$$

となり, $f = 0$ の根が複素平面上で正三角形をなすための必要十分条件

$$(a, b, c) \in V(a^2 - 3b) \subseteq \mathbb{C}^3$$

に一致する.

定理 2 を具体的な数で確かめてみたい. $\alpha = 1 + i$, $\beta = -1 + 2i$, $\gamma = 2 + 11i/2$ とすると α, β, γ は複素平面上で二等辺三角形をなす. 一方で α, β, γ は方程式

$$x^3 - \left(2 + \frac{17}{2}i\right)x^2 - \left(\frac{39}{2} - 7i\right)x + \left(\frac{23}{2} + \frac{29}{2}i\right) = 0$$

の根である. 実際 g_0 に α, β, γ を代入して計算すれば

$$g_0 = \left(-\frac{11}{16} + \frac{117}{64}i\right)(-17+4m)((-8-2i)+(8+15i)m)((-2-8i)+(15+8i)m)$$

となり, $m = 17/4$ で $g_0 = 0$ となり定理の条件を満たしている.

この例では元の方程式の係数は複素数であるが, 係数が実数であるときは g_0 は m に関して実係数の 3 次方程式となる. このとき $g_0(m) = 0$ は少なくとも一つの実数根を持つ. 補題で補足したように, この場合は根は複素平面上で一直線になるか二等辺三角形をなす. 実係数の 3 次方程式の根は一つの実数と共役複素数であるから, 根が一直線になるか二等辺三角形になることは簡単に分かるが, それがこの定理からもわかる.

4 謝辞

この論文を執筆するにあたって, たくさんの指導をいただいた楫先生, 楫研究室の皆様にご心より感謝いたします.

5 参考文献

D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer, 1996.