A^3 内のパラメータ表示される曲線について

早稲田大学基幹理工学部数学科
1W070188-3 國時奈央

卒業論文の主な問題

k; 代数閉体

曲線 $Y = \{(t^l, t^m, t^n); t \in k\}$ のイデアル $I(Y)$ は？

$\rightarrow Y = \{(t, t^2, t^3); t \in k\}$ では $I(Y) =< x^2 - y, x^3 - z >$

$\rightarrow Y = \{(t^3, t^4, t^5); t \in k\}$ のイデアルは同様には求められない.

→いくつかの一般化についての結果が出た。

イデアル I(Y) の定義

$k[x, y, z]$ のイデアルで, Y 上で消えている
(Y のどの点を代入しても 0 になっている)
元たちをすべて集めたもの.

一般化の方法

$$Y = \{(t, t^2, t^3); t \in k\} \text{ では } I(Y) =< x^2 - y, x^3 - z >$$
$$\rightarrow Y = \{(t, t^m, t^n); t \in k\}$$
$$\rightarrow Y = \{(t^m, t^n, t^{m+n}); t \in k\}$$
$$\rightarrow Y = \{(t^n, t^{n+1}, t^{n+2}); t \in k\}$$

定理１

$(m, n) = 1$ なる整数 m, n によって
$Y = \{(t, t^m, t^n); t \in k\}$ とあらわせる場合
$\Rightarrow I(Y) =< x^m - y, x^n - z >$ となる.

定理２

$(m, n) = 1$ なる整数 m, n によって
$Y = \{(t^m, t^n, t^{m+n}); t \in k\}$ とあらわせる場合
$\Rightarrow I(Y) =< xy - z, x^n - y^m >$ となる.

定理２の略証

$I =< xy - z, x^n - y^m >$ とする. $I \supseteq I(Y)$ のみ示せばよい.
$I(Y) \ni f(x, y, z)$ を z についての多項式とみて, これを $xy - z$ で割る.
$\rightarrow f(x, y, z) = (xy - z)f_1(x, y, z) + f_2(x, y)$

ここで, $f_2(x, y)$ は任意の $t \in k$ と整数 m, n に対して $f_2(t^m, t^n) = 0$ であるから,
下記の Lemma を用いることによって,$f_3(x, y)$ があって,

$$f_2(x, y) = (x^n - y^m)f_3(x, y)$$

とかけることがわかる. よって, 示せた. ■

$\boxed{\text{Lemma}}$

k を代数閉体とする. ある $f(x,y) \in k[x,y]$ について,
$\exists\ n,m \in \mathbf{Z}_{>0}$, $n < m$, $(n,m)=1$ s.t.

$$f(t^n,t^m) = 0\ (\forall t \in k)$$

$\Rightarrow \exists\ g(x,y) \in k[x,y]$ s.t. $f(x,y) = (x^m - y^n)g(x,y)$

$\boxed{\text{Lemma の証明}}$

$f(x,y)$ を y の多項式とみて, $x^m - y^n$ でわる.
すると, ある $g(x)$ と $f_1(x)$,$f_2(x),\cdots,f_n(x)$ があって,

$$f(x,y) = (x^m - y^n)g(x,y) + y^{n-1}f_1(x) + y^{n-2}f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

よって, これに代入して, これが $I(Y)$ の元であるから,

$$0 = f(t^n,t^m) = t^{m(n-1)}f_1(t^n) + t^{m((n-2)}f_2(t^n) + \cdots + f_n(t^n)$$

ここで, $f_i = \Sigma_j \alpha_{ij} x^j$ とおく. さらに、$g(T)$ を,

$$g(T) := T^{m(n-1)}f_1(T^n) + T^{m((n-2)}f_2(T^n) + \cdots + f_n(T^n)$$

で定義する. すると,

$$g(T) = \Sigma_j \alpha_{ij} T^{m(n-1)} + \cdots + \Sigma_j \alpha_{ij} T^{nj}$$

となる. ここで,

$$\exists i_0, \exists i_1, \exists j_0, \exists j_1 \quad s.t.\ 1 \leq i_0 \leq i_1 \leq n,$$
$$m(n-i_0) + nj_0 = m(n-i_1) + nj_1$$

とすると,

$$-mi_0 + nj_0 = -mi_1 + nj_1$$
$$n(j_0 - j_1) = m(i_0 - i_1)$$

ここで, $(m,n)=1$ より,

$$n | i_o - i_1$$

ここで, 条件より, $0 \leq i_0 - i_1 \leq n-1$ となる. したがって,$i_0 - i_1 = 0$ がわかる.
これより, $i_0 = i_1$,$j_0 = j_1$ が成り立つ. したがって, ここで

$$g(T) := \Sigma_l c_l T^l$$

とすると, $\forall\ l \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して,

$$\exists! i, \exists! j \quad s.t. \quad l = m(n-i) + nj \quad or \quad c_l = 0$$

$g(T)$ は $\sharp k = \infty$ である任意の $t \in k$ に対して $g(t) = 0$ であることから,
任意の l に対して, $c_l = 0$
したがって, 任意の i,j に対して,

$$\alpha_{ij} = 0$$

以上より示せた. ■

定理３

ある整数 n によって

$Y=\{(t^n,t^{n+1},t^{n+2});t\in k\}$ とあらわせる場合

n が偶数の場合は, $n=2n_0$ と書くと,

$\Rightarrow I(Y)=<zx-y^2, z^{n_0+1}-x^{n_0}y^2, h_0, h_1, \ddots, h_{n_0}>$

(ただし $h_l=y^{2l}z^{n_0-l}-x^{n_0+l+1}$)

n が奇数の場合は, $n=2n_0+1$ と書くと,

$\Rightarrow I(Y)=<zx-y^2, z^{n_0+1}-x^{n_0+1}y, h_0, h_1, \ddots, h_{n_0}>$

(ただし $h_l=y^{2l+1}z^{n_0-l}-x^{n_0+l+2}$)

定理３の略証

ここでは, n が偶数の場合のみ証明する. 奇数の場合も同様に証明される.
ブッフベルガーアルゴリズムと消去定理を用いる.
消去順序として, 辞書式順序 $t>z>y>x$ を用いる.

$f_1=t^n-x$

$f_2=t^{n+1}-y$

$f_3=t^{n+2}-z$

の３本の式から, ブッフベルガーアルゴリズムをスタートさせる.

$f_4=tx-y$

$f_5=ty-z$

$f_6=zx-y^2$

$f_i=t^{n-2i}z^i-x^{i+1}$（ただし $i=1,2,\ddots,n_0-1$）

$f_{n_0}=z^{n_0}-x^{n_0+1}$

$g=y^2z^{n_0-1}-x^{n_0+2}$

$h_l=z^{n_0-l}y^{2l}-x^{n_0+l+1}$（ただし $l=0,1,\ddots,n_0$）

ブッフベルガーアルゴリズムにより,
これらの多項式がグレブナー基底をなすことがわかる.
よって, 消去定理を用いて t を消去すると,

$$I(Y)=<f_6, f_{n_0}, g, h_0, \ddots, h_{n_0}>$$

であることがわかる. ■

今後の課題

・曲線 $Y=\{(t^l,t^m,t^n);t\in k\}$ のイデアル $I(Y)$ は？
・上の各場合において、生成元の個数の最小値は？