A^3内のパラメータ表示される曲線について

早稲田大学基幹理工学部数学科
1W070188-3 國時奈央

February 7, 2011

卒業論文の主な問題

k; 代数閉体

曲線 $Y = \{(t^l, t^m, t^n); t \in k\}$ **のイデアル** $I(Y)$ **は？**

$\rightarrow Y = \{(t, t^2, t^3); t \in k\}$ では $I(Y) = < x^2 - y, x^3 - z >$
$\rightarrow Y = \{(t^3, t^4, t^5); t \in k\}$ のイデアルは同様には求められない.
$\rightarrow$いくつかの一般化についての結果が出た。

イデアルI(Y)の定義

$k[x, y, z]$ のイデアルで，Y 上で消えている
(Y のどの点を代入しても 0 になっている)
元たちをすべて集めたもの.

$\boxed{\text{一般化の方法}}$

$Y = \{(t, t^2, t^3); t \in k\}$ では $I(Y) = < x^2 - y, x^3 - z >$

$\rightarrow Y = \{(t, t^m, t^n); t \in k\}$
$\rightarrow Y = \{(t^m, t^n, t^{m+n}); t \in k\}$
$\rightarrow Y = \{(t^n, t^{n+1}, t^{n+2}); t \in k\}$

$\boxed{\text{定理1}}$

$(m,n)=1$なる整数m,nによって
$Y=\{(t,t^m,t^n);t\in k\}$とあらわせる場合

$\Rightarrow I(Y)=<x^m-y,x^n-z>$となる.

$\boxed{\text{定理2}}$

$(m,n)=1$なる整数m,nによって
$Y=\{(t^m,t^n,t^{m+n});t\in k\}$とあらわせる場合

$\Rightarrow I(Y)=<xy-z,x^n-y^m>$となる.

定理 2 の略証

$I = < xy - z, x^n - y^m >$ とする．$I \supseteq I(Y)$ のみ示せばよい．
$I(Y) \ni f(x,y,z)$ を z についての多項式とみて，これを $xy - z$ で割る．
$\to f(x,y,z) = (xy-z)f_1(x,y,z) + f_2(x,y)$

ここで，$f_2(x,y)$ は任意の $t \in k$ と整数 m,n に対して $f_2(t^m, t^n) = 0$ であるから，
下記の Lemma を用いることによって,$f_3(x,y)$ があって,

$$f_2(x,y) = (x^n - y^m)f_3(x,y)$$

とかけることがわかる．よって，示せた. ■

$\boxed{\text{Lemma}}$

kを代数閉体とする．ある$f(x,y) \in k[x,y]$について，
$\exists\, n, m \in \mathbf{Z}_{>0}$, $n < m$, $(n,m) = 1$ s.t.

$$f(t^n, t^m) = 0 \ (\forall t \in k)$$

$\Rightarrow \exists\, g(x,y) \in k[x,y]$ s.t. $f(x,y) = (x^m - y^n) g(x,y)$

$\boxed{\text{Lemmaの証明}}$

$f(x,y)$をyの多項式とみて，$x^m - y^n$でわる．
すると，ある$g(x)$と$f_1(x)$,$f_2(x), \cdots, f_n(x)$があって，

$$f(x,y) = (x^m - y^n)g(x,y) + y^{n-1}f_1(x) + y^{n-2}f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

よって，これに代入して，これが$I(Y)$の元であるから，

$$0 = f(t^n, t^m) = t^{m(n-1)}f_1(t^n) + t^{m((n-2)}f_2(t^n) + \cdots + f_n(t^n)$$

ここで，$f_i = \Sigma_j \alpha_{ij} x^j$とおく．さらに、$g(T)$を，

$$g(T) := T^{m(n-1)}f_1(T^n) + T^{m((n-2)}f_2(T^n) + \cdots + f_n(T^n)$$

で定義する．すると，

$$g(T) = \Sigma_j \alpha_{ij} T^{m(n-1)} + \cdots + \Sigma_j \alpha_{ij} T^{nj}$$

となる．ここで，

$$\exists i_0, \exists i_1, \exists j_0, \exists j_1 \quad s.t.$$

$$1 \le i_0 \le i_1 \le n,$$

$$m(n-i_0)+nj_0 = m(n-i_1)+nj_1$$

とすると，

$$-mi_0+nj_0 = -mi_1+nj_1$$

$$n(j_0-j_1) = m(i_0-i_1)$$

ここで，$(m,n)=1$ より，

$$n|i_o - i_1$$

ここで，条件より，$0 \le i_0 - i_1 \le n-1$ となる．
したがって,$i_0 - i_1 = 0$ がわかる．

これより，$i_0 = i_1, j_0 = j_1$ が成り立つ．
したがって，ここで

$$g(T) := \Sigma_l c_l T^l$$

とすると，
$\forall\, l \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して，

$$\exists ! i, \exists ! j \quad s.t. \quad l = m(n-i) + nj \quad or \quad c_l = 0$$

$g(T)$ は $\sharp k = \infty$ である任意の $t \in k$ に対して $g(t) = 0$ であることから，
任意の l に対して，$c_l = 0$
したがって，任意の i, j に対して，

$$\alpha_{ij} = 0$$

以上より示せた．■

$\boxed{\text{定理3}}$

ある整数nによって

$Y = \{(t^n, t^{n+1}, t^{n+2}); t \in k\}$とあらわせる場合

nが偶数の場合は，$n = 2n_0$と書くと，

$\Rightarrow I(Y) = < zx - y^2, z^{n_0+1} - x^{n_0}y^2, h_0, h_1, \cdots, h_{n_0} >$

(ただし$h_l = y^{2l}z^{n_0-l} - x^{n_0+l+1}$)

nが奇数の場合は，$n = 2n_0 + 1$と書くと，

$\Rightarrow I(Y) = < zx - y^2, z^{n_0+1} - x^{n_0+1}y, h_0, h_1, \cdots, h_{n_0} >$

(ただし$h_l = y^{2l+1}z^{n_0-l} - x^{n_0+l+2}$)

定理３の略証

ここでは，nが偶数の場合のみ証明する．奇数の場合も同様に証明される．

ブッフベルガーアルゴリズムと消去定理を用いる．

消去順序として,辞書式順序$t > z > y > x$を用いる．

$$f_1 = t^n - x$$
$$f_2 = t^{n+1} - y$$
$$f_3 = t^{n+2} - z$$

の３本の式から，ブッフベルガーアルゴリズムをスタートさせる．

$$f_4 = tx - y$$
$$f_5 = ty - z$$
$$f_6 = zx - y^2$$
$$f_i = t^{n-2i} z^i - x^{i+1} \text{（ただし} i = 1, 2, \cdots, n_0 - 1\text{）}$$
$$f_{n_0} = z^{n_0} - x^{n_0+1}$$
$$g = y^2 z^{n_0-1} - x^{n_0+2}$$
$$h_l = z^{n_0-l} y^{2l} - x^{n_0+l+1} \text{（ただし} l = 0, 1, \cdots, n_0\text{）}$$

ブッフベルガーアルゴリズムにより,
これらの多項式がグレブナー基底をなすことがわかる.
よって, 消去定理を用いてtを消去すると,

$$I(Y) = < f_6, f_{n_0}, g, h_0, \cdots, h_{n_0} >$$

であることがわかる. ■

$\boxed{\boxed{\text{今後の課題}}}$

・曲線 $Y = \{(t^l, t^m, t^n); t \in k\}$ のイデアル $I(Y)$ は？

・上の各場合において、生成元の個数の最小値は？

$\boxed{\text{定理１}}$

$(m,n)=1$なる整数m,nによって

$Y=\{(t,t^m,t^n);t\in k\}$とあらわせる場合

$\rightarrow I(Y_1)=<x^m-y,x^n-z>$となる.

$\boxed{\text{定理２}}$

$(m,n)=1$なる整数m,nによって

$Y_2=\{(t^m,t^n,t^{m+n});t\in k\}$とあらわせる場合

$\rightarrow I(Y_2)=<xy-z,x^n-y^m>$となる.

$\boxed{\text{定理３}}$

ある整数nによって

$Y=\{(t^n,t^{n+1},t^{n+2});t\in k\}$とあらわせる場合

nが偶数の場合は, $n=2n_0$と書くと,

$\Rightarrow I(Y)=<zx-y^2,z^{n_0+1}-x^{n_0}y^2,h_0,h_1,\cdots,h_{n_0}>$

(ただし$h_l=y^{2l}z^{n_0-l}-x^{n_0+l+1}$)

nが奇数の場合は, $n=2n_0+1$と書くと,

$\Rightarrow I(Y_3)=<zx-y^2,z^{n_0+1}-x^{n_0+1}y,h_0,h_1,\cdots,h_{n_0}>$

(ただし$h_l=y^{2l+1}z^{n_0-l}-x^{n_0+l+2}$)