2010年度卒業論文
$\mathbf{A}^3$ 内のパラメータ表示される曲線について

早稲田大学　数学科
1W070188-3 國時奈央
指導教員：楫元

2011年2月7日

目 次

第1章　序文

$[H]$ の CHAPTER I の EXERCISES において, 1.2 ではいわゆる The Twisted Cubic Curve である

$$Y = \{(t, t^2, t^3); t \in k\}$$

であらわされる A^3 内の曲線のイデアル $I(Y)$ を求めさせる問題がある.
また, 1.11 においては,

$$Y = \{(t^3, t^4, t^5); t \in k\}$$

であらわされる曲線のイデアル $I(Y)$ が 2 元生成でないことを示させる問題が掲載されている.
これらの問題を解く中で, より一般に

$$Y = \{(t^l, t^m, t^n); t \in k\}$$

で表される曲線のイデアル $I(Y)$ はどのようになっているのかという疑問を抱いた.
このなかでいくつかの条件をつけた場合においては, 具体的にイデアル $I(Y)$ を求めることができた.

第2章　いくつかの定義と約束

k を代数閉体とする. k 上の3次元アフィン空間を A^3 であらわす.
曲線Yに対して, そのイデアルを $I(Y)$ であらわす.
また,

$$Y = \{(t^l, t^m, t^n); t \in k\}$$

の形の曲線を多く扱っていくため, この曲線を (l, m, n) 型ということにする.
たとえば, $(n, n+1, n+2)$ 型の曲線と書けば,

$$\{(t, t^2, t^3); t \in k\} \text{ や } \{(t^3, t^4, t^5); t \in k\}$$

のような曲線を表すことにする.

第3章　$(1, m, n)$型の曲線について

Proposition.1

$(1, m, n)$ 型の曲線 Y_1 のイデアルは,

$$I(Y_1) =< x^m - y, x^n - z >$$

とあらわすことができる.

Proof

$I =< x^m - y, x^y - z >$ とおく.$I = I(Y)$ を示したい.$I \subseteq I(Y)$ のみ示せばよい.

$f(x, y, z) \in I(Y)$ をとる. これを z の多項式とみて $x^n - z$ で割る. すると, ある $f_1(x, y, z)$ と $f_2(x, y)$ があって以下のように書ける.

$$f(x, y, z) = (x^n - z)f_1(x, y, z) + f_2(x, y)$$

ここで, $f_2(x, y)$ を y の多項式とみて, $x^m - y$ でわる.

すると, ある $f_3(x, y)$ と $f_4(x)$ があって, 以下のように書ける.

$$f_2(x, y) = (x^m - y)f_3(x, y) + f_4(x)$$

よって,

$$f(x, y, z) = (x^n - z)f_1(x, y, z) + (x^m - y)f_3(x, y) + f_4(x)$$

これが $I(Y_1)$ の元であるから,(t, t^m, t^n) を代入して,

$$0 = f(t, t^m, t^n) = f(t)$$

これが,$\sharp k = \infty$ なる $\forall\ t \in k$ に対して成立するから,

$$f_4(x) = 0 \ \ in\ k[x]$$

すなわち,

$$f(x, y, z) = (x^n - z)f_1(x, y, z) + (x^m - y)f_3(x, y)$$

よって示せた. ■

第4章　$(m, n, m+n)$型の曲線について

Proposition.2

$(m, n, m+n)$ 型の曲線 Y_2 のイデアルは,

$$I(Y_2) =< xy - z, x^n - y^m >$$

とあらわすことができる.

Proof

$I =< xy - z, x^n - y^m >$ とすると, $I(Y_2) = I$ を示したい. $I \supseteq I(Y_2)$ のみ示せばよい. $I(Y_2) \ni f(x, y, z)$ をとる.

z についての多項式とみて, これを $xy - z$ で割る. すなわち, 多項式 $f_1(x, y, z)$ と $f_2(x, y)$ があって,

$$f(x, y, z) = (xy - z)f_1(x, y, z) + f_2(x, y)$$

とかける.

ここで, $f_2(x, y)$ は任意の $t \in k$ と整数 m, n に対して $f_2(t^m, t^n) = 0$ であるから, 下記の Lemma を用いることによって,$f_3(x, y)$ があって,

$$f_2(x, y) = (x^n - y^m)f_3(x, y)$$

とかけることがわかる. よって,

$$f(x, y, z) = (xy - z)f_1(x, y, z) + (x^n - y^m)f_3(x, y)$$

であるから, 示せた. ■

Lemma.1

k を代数閉体とする. ある $f(x,y) \in k[x,y]$ について,
$\exists\ n, m \in \mathbf{Z}_{>\,0}$, $n < m$, $(n,m) = 1$ s.t.

$$f(t^n, t^m) = 0\ (\forall\ t \in k)$$

$\Rightarrow \exists\ g(x,y) \in k[x,y]$ s.t. $f(x,y) = (x^m - y^n)g(x,y)$

Proof

$f(x,y)$ を y の多項式とみて, $x^m - y^n$ でわる.
すると, ある $g(x)$ と $f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_n(x)$ があって,

$$f(x,y) = (x^m - y^n)g(x,y) + y^{n-1}f_1(x) + y^{n-2}f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

よって, これに代入して, これが $I(Y)$ の元であるから,

$$0 = f(t^n, t^m) = t^{m(n-1)}f_1(t^n) + t^{m((n-2)}f_2(t^n) + \cdots + f_n(t^n)$$

ここで, $f_i = \Sigma_j \alpha_{ij} x^j$ とおく. さらに、$g(T)$ を,

$$g(T) := T^{m(n-1)}f_1(T^n) + T^{m((n-2)}f_2(T^n) + \cdots + f_n(T^n)$$

で定義する. すると,

$$g(T) = \Sigma_j \alpha_{ij} T^{m(n-1)} + \cdots + \Sigma_j \alpha_{ij} T^{nj}$$

となる.
ここで,

$$\exists\ i_0, \exists\ i_1, \exists\ j_0, \exists\ j_1\ \ s.t.$$

$$1 \leqq i_0 \leqq i_1 \leqq n,$$

$$m(n - i_0) + nj_0 = m(n - i_1) + nj_1$$

とすると,

$$-mi_0 + nj_0 = -mi_1 + nj_1$$

$$n(j_0 - j_1) = m(i_0 - i_1)$$

ここで, $(m,n) = 1$ より,

$$n | i_o - i_1$$

ここで, 条件より, $0 \leqq i_0 - i_1 \leqq n - 1$ となる.
したがって,$i_0 - i_1 = 0$ がわかる.
これより, $i_0 = i_1$,$j_0 = j_1$ が成り立つ.

したがって, ここで

$$g(T) := \Sigma_l c_l T^l$$

とすると,
$\forall\, l \in \mathbf{Z}_{>\,0}$ に対して,

$$\exists ! i, \exists ! j \quad s.t. \quad l = m(n-i) + nj \quad or \quad c_l = 0$$

$g(T)$ は $\sharp k = \infty$ である任意の $t \in k$ に対して $g(t) = 0$ であることから,
任意の l に対して, $c_l = 0$
したがって, 任意の i,j に対して,

$$\alpha_{ij} = 0$$

以上より示せた. ■

第5章　$(n, n+1, n+2)$ 型の曲線について

Proposition.3

$(n, n+1, n+2)$ 型の曲線 Y_3 のイデアルは,
n が偶数の場合, $n = 2n_0$ とすると,

$I(Y_3) =< zx - y^2, z^{n_0+1} - x^{n_0}y^2, h_0, h_1, \cdots, h_{n_0} >$　(ただし $h_l = y^{2l}z^{n_0-l} - x^{n_0+l+1}$)

n が奇数の場合, $n = 2n_0 + 1$ とすると,

$I(Y_3) =< zx - y^2, z^{n_0+1} - x^{n_0+1}y, h_0, h_1, \cdots, h_{n_0} >$　(ただし $h_l = y^{2l+1}z^{n_0-l} - x^{n_0+l+2}$)

とあらわすことができる.

- **n が偶数の場合**

Proof

ブッフベルガー判定法と消去定理を用いる.
消去順序として, 辞書式順序 $t > z > y > x$ を用いる.

$f_1 = t^n - x$
$f_2 = t^{n+1} - y$
$f_3 = t^{n+2} - z$
$f_4 = tx - y$
$f_5 = ty - z$
$f_6 = zx - y^2$
$f_i = t^{n-2i}z^i - x^{i+1}$(ただし $i = 1, 2, \cdots, n_0 - 1$)
$f_{n_0} = z^{n_0} - x^{n_0+1}$
$g = y^2z^{n_0-1} - x^{n_0+2}$
$h_l = z^{n_0-l}y^{2l} - x^{n_0+l+1}$(ただし $l = 0, 1, \cdots, n_0$)

以上の多項式について, ブッフベルガー判定法を用いると, これらの多項式がグレブナー基底をなすことがわかる. よって, 消去定理を用いて t を消去すると,

$$I(Y) =< f_6, f_{n_0}, g, h_0, \cdots, h_{n_0} >$$

であることがわかる. ■

・n **が奇数の場合**

Proof

ブッフベルガー判定法と消去定理を用いる.

消去順序として, 辞書式順序 $t > z > y > x$ を用いる.

$f_1 = t^n - x$

$f_2 = t^{n+1} - y$

$f_3 = t^{n+2} - z$

$f_4 = tx - y$

$f_5 = ty - z$

$f_6 = zx - y^2$

$f_i = t^{n-2i}z^i - x^{i+1}$（ただし $i = 1, 2, \cdots, n_0 - 1$）

$f_{n_0} = tz^{n_0} - x^{n_0+1}$

$g = z^{n_0+1} - yx^{n_0+1}$

$h_l = z^{n_0-l}y^{2l+1} - x^{n_0+l+2}$（ただし $l = 0, 1, \cdots, n_0$）

以上の多項式について、ブッフベルガー判定法を用いると, 以上の多項式がグレブナー基底をなすことがわかる。よって、消去定理を用いて t を消去すると、

$$I(Y) =< f_6, g, h_0, \cdots, h_{n_0} >$$

であることがわかる。■

第6章　謝辞

　この卒業論文作成にあたり、たくさんのご指導、ご指摘をいただいた椙元先生や、椙研究室の皆様に、心よりお礼申し上げます。

第7章　参考文献

[H]:Hartshorne Algebraic Geometry GTM52