

無限体上における Nullstellensatz について

理工学部 数理科学科 楯研究室
1G06L048-5 手島 悠人

1 動機

定理 (Nullstellensatz)

代数閉体 k 上の多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ において, I をそのイデアルとすると,

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$$

が成り立つ.

Nullstellensatz を用いる事で, 代数閉体 k 上多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ において, I を根基イデアルとすると,

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$$

が成り立つ事が分かる. ただし,

$$\mathbf{V}(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid \forall f \in I \text{ に対して } f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{S}) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{S} \subset k^n \text{ に対し } f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

とする.

しかし, k が代数閉体でないときは, I が根基イデアルだとしても, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ が成り立つとは限らない.

■問題提起 無限体上で $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ が成り立つ必要十分条件はどのようなものであるか.

2 主定理

主定理 1

$f \in k[x]$ で生成されるイデアル $I = \langle f \rangle \subset k[x]$ に対し, 次が成り立つ.

$$f = 0 \text{ 又は } (\mathbf{V}(I))^\# = \deg(f) \iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$$

主定理 2

$f \in k[x, y]$ を既約な多項式とし, $I = \langle f \rangle$ とする. このとき,

$$(\mathbf{V}(I))^\# = \infty \iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$$

系 3

$f = f_1 \cdots f_s \in k[x, y]$ を既約な多項式の積で, 任意の異なる i と j において, $f_i \nmid f_j$ として, $I = \langle f \rangle$ とする. このとき,

$$1 \leq \forall l \leq s \text{ で } (\mathbf{V}(\langle f_l \rangle))^{\#} = \infty \iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$$

主定理 2 の証明に次の命題を用いた.

命題

$f, q \in k[x, y]$ で, $\deg_x(f) = l$ とする. このとき, 次を満たす $h, r \in k[x, y]$ が存在する.

$$\{\mathrm{LC}_x(q)\}^l f = hq + r \text{ かつ, } \deg_x(r) < \deg_x(q)$$

ただし, $\deg_x(f) = l$ は f を $k[y]$ 上の x の多項式と見たときの次数.

$\mathrm{LC}_x(q)$ は同様の見方をしたときの, 先頭項係数.

参考文献

- [1] D.Cox J.Little D.O'shea *Ideals, Varieties, and Algorithms* Springer (1996 年)
- [2] 酒井 文雄, 環と体の理論, 共立出版株式会社 (1997 年)