無限体上における Nullstellensatzについて

楫研究室 学部４年
1G06L048-5　手島 悠人

1　動機

定理（Nullstellensatz）

代数閉体 k 上の多項式環 $k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ において，I をそのイデアルとすると，

$$\mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right)=\sqrt{I}$$

が成り立つ．

これを用いて,

$I \subset k\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ **が根基イデアル** $\iff \mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right) = I$

が成り立つ事が分かる.

しかし,k **が代数閉体でないときは**, I **が根基イデアルであっても成り立つとは限らない**.

<u>例</u>

$I = \langle x^2 + 1 \rangle \subset \mathbf{R}\left[\mathbf{x}\right]$ **とすると**, $\mathbf{V}\left(I\right) = \emptyset$ **となり**,

$\mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right) = \mathbf{R}\left[\mathbf{x}\right] \neq \mathbf{I}$

問題提起

無限体上で$\mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right) = I$ が成り立つ必要十分条件はどのようなものであるか.

$\longrightarrow$ 私には分からない.

$\longrightarrow \quad k\left[x\right],\ k\left[x,y\right]$ で調べる事にした.

2 主定理

主定理1

$f \in k\left[x\right]$ で生成されるイデアル

$I = \langle f \rangle \subset k\left[x\right]$ に対し, 次が成り立つ.

$f = 0$ 又は $\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right)^\sharp = \deg\left(f\right)$

$\iff \quad \mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right) = I$

主定理2

$f \in k\left[x, y\right]$ を既約な多項式とし，$I = \langle f \rangle$ とすると，

$$(\mathbf{V}(I))^\sharp = \infty \iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$$

系3

$f = f_1 \cdots f_s \in k\left[x, y\right]$ を既約な多項式の積，
任意の異なる i と j で $f_i \not| f_j$，$I = \langle f \rangle$ とすると，
$1 \leq \forall l \leq s$ で $(\mathbf{V}(\langle f_l \rangle))^\sharp = \infty$
$\iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$

3　主定理2の略証

命題

$f, q \in k\left[x, y\right]$ **で**, $\deg_x(f) = l$ **とする**. **このとき**, **次を満たす** $h, r \in k\left[x, y\right]$ **が存在する**.

$$\left\{\mathrm{LC}_x(q)\right\}^l f = hq + r \text{かつ}, \deg_x(r) < \deg_x(q)$$

例

$x^2 + x + 1$ **を** $yx + 1$ **で "割り算" する**. $\longrightarrow$
$y^2\left(x^2 + x + 1\right) = (yx + y + 1)(yx + 1) + y^2 - y + 1$

主定理２の$\Rightarrow$を示す.

$\mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right) \supseteq I$ **は常に成り立つので**, $\mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right) \subseteq I$**を示す**.

$\deg_x\left(f\right) \geq 1$ **かつ**,

$$\left\{b \in k \mid \exists a \in k \quad s.t. \left(a, b\right) \in \mathbf{V}\left(I\right)\right\}^{\sharp} = \infty$$

と仮定できる.

$F \in \mathbf{I}\left(\mathbf{V}\left(I\right)\right)$ **とする**. **命題を用いて**,

$$\left\{\mathsf{LC}_x\left(f\right)\right\}^c F = h\left(x, y\right) f + r\left(x, y\right) \qquad \left(c = \deg_x\left(F\right)\right)$$

$r\left(x, y\right) = 0$**を示せば**, f**が既約より**, $F \in \langle f \rangle = I$.

(i) $\deg_x(r) = 0$ **のとき**

$\longrightarrow$ **先の仮定と** k **が無限体である事から**, $r(x,y) = 0$.

(ii) $\deg_x(r) > 0$ **のとき**

$$\left\{\mathsf{LC}_x(r)\right\}^d f = h_1(x,y)\,r + r_1(x,y) \quad (d = \deg_x(f))$$

$\longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(A)} \quad \deg_x(r_1) = 0 \text{ のとき}, r_1 = 0 \text{ となり}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{矛盾が生じる}. \\ \text{(B)} \quad \deg_x(r_1) > 0 \text{ のとき}, f \text{ を } r_1 \text{ で割る}. \\ \quad \left\{\mathsf{LC}_x(r_1)\right\}^d f = h_2(x,y)\,r_1 + r_2(x,y) \end{array}\right\}$$

$\longrightarrow$ 以下 $r_2, r_3 \ldots$ で { } と同様にすれば,

$$\deg_x(r_1) > \deg_x(r_2) > \deg_x(r_3) > \cdots$$

なので, $r_t = 0$ となり矛盾.

主定理2

$f \in k\left[x, y\right]$ を既約な多項式とし，$I = \langle f \rangle$ とすると，

$$(\mathbf{V}(I))^\sharp = \infty \iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$$

系3

$f = f_1 \cdots f_s \in k\left[x, y\right]$ を既約な多項式の積，
任意の異なる i と j で $f_i \not| f_j$，$I = \langle f \rangle$ とすると，
$1 \leq \forall l \leq s$ で $(\mathbf{V}(\langle f_l \rangle))^\sharp = \infty$
$\iff \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$

参考文献

[1] D.Cox　J.Little　D.O'shea
Ideals, Varieties, and　Algorithms　Springer
(1996年)

[2] 酒井 文雄, 環と体の理論, 共立出版株式会社 (1997年)