

Scheme-theoretic image の存在と構造

楫研究室 鈴木 拓

問題提起

schemes の morphism $f: Z \rightarrow X$ の scheme-theoretic image (s.im.) とは, f が経由するような X の最小の closed subscheme (c.s.) のことである. [H] には "s.im. が一意に存在する" と述べられており証明は記載されていない. X が affine の場合には容易にわかる (f に対応する hom の kernel から定まる c.s. をとればよい) ので, 局所的に s.im. となるものを貼り合わせればよいと考えられる. しかし, これはうまくいかない. また, [H] には " $\overline{f(Z)}$ に s.im. の構造を入れる" という議論が度々登場するが, s.im. Y が存在したとしても $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となることを正当化できない. そこで, [H] の記述に間違いがあるのではないかと思い, 以下のことについて考察した:

- (a) s.im. が存在しない例はあるか.
- (b) s.im. Y が存在するとき $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ とならない例はあるか. $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となるための条件は何か.
- (c) s.im. Y が存在するとき ideal sheaf $\mathcal{I}_Y$ や structure sheaf $\mathcal{O}_Y$ はどう表せるか.

結論

- 2 種類の構成法を得た:
 - 局所的構成法... f が quasi-compact or Z が reduced の条件の下での貼り合わせによる方法.
 - 大域的構成法...任意の f に対して適用できる貼り合わせによらない方法.
- 後者の構成法により, (a) は否定的に解決した:

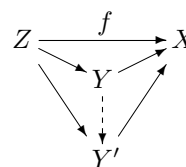
Theorem 1. 任意の f に対して s.im. が存在する.
- 前者の構成法によりわかる結果から, (b),(c) への答えとして:

Theorem 2. f が quasi-compact or Z が reduced という条件の下で貼り合わせにより s.im. Y を構成でき, $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y = (\text{im } f^\#)|_Y$, $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ が成立する. 特に Z が reduced のとき Y も reduced.
- non-reduced-degree $d(X)$ という scheme の不変量を見出し $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる条件を一般化した:

Theorem 3. $d(Z) < \infty$ ならば $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$. さらに, $d(Y) \leq d(Z)$.
- それぞれの条件の差を表す例として見つけたもの: quasi-compact でも reduced でもなくて,
 - $\text{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y \neq (\text{im } f^\#)|_Y$ となる例 (Example 5)
 - 局所的構成法が使えない例 (Example 6)
 - $d(Z) < \infty$ であって, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ となる例 (Example 9)

Definition 4. scheme の定義は [H] に従う.

- X の c.s. Y が $f: Z \rightarrow X$ の scheme-theoretic image であるとは,
 - (1) f が Y を経由する.
 - (2) f が別の c.s. Y' を経由するとき, $Y \rightarrow X$ も Y' を経由する.



- scheme X が *reduced* $\Leftrightarrow$ 任意の open subset $U \subseteq X$ に対して $\text{nil } \mathcal{O}_X(U) = 0$.
- $f : Z \rightarrow X$ が *quasi-compact* $\Leftrightarrow X$ が open affine covering $\{U_i\}$ を持ち、各 $f^{-1}(U_i)$ が topological space として *quasi-compact*.

Example 5. ($\text{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$ の例)

$X := \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$, $Z_n := \text{Spec } k[x]/(x^n)$, $f : Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n \rightarrow X$ (Figure 1).
このとき, $Y = X \supsetneq \overline{f(Z)} = \{O\}$. (また, $\mathcal{I}_Y = 0 \neq \ker f^\#$.)

non-reduced なものが無限個 (non-quasi-compact) があると $\{O\}$ から溢れる.

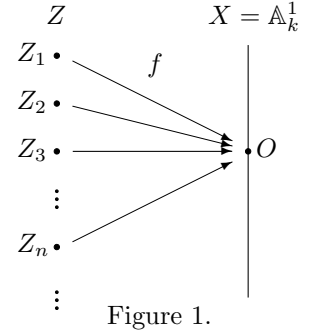


Figure 1.

Example 6. (貼り合わせ不可能な例)

$X := \mathbb{P}_k^1 = \text{Proj } k[x, y]$, $Z_n := \text{Proj } k[x, y]/(x^n)$, $f : Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n \rightarrow X$ (Figure 2).
 X は 2 つの open affine subsets $U_O = D_+(y)$, $U_\infty = D_+(x)$ で cover され、

$f|_{f^{-1}(U_O)} : f^{-1}(U_O) = Z \rightarrow U_O$ の s.im. は U_O .

$f|_{f^{-1}(U_\infty)} : f^{-1}(U_\infty) = \emptyset \rightarrow U_\infty$ の s.im. は $\emptyset$.

$U_O \cap U_\infty$ でこれらは不一致. 貼り合わせ不可能.

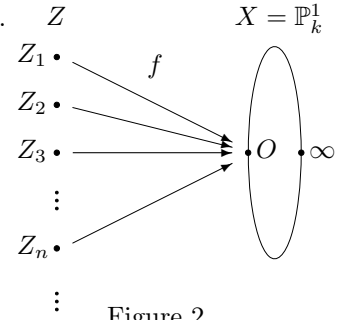


Figure 2.

Non-reduced-degree を用いた一般化

Example 7. Example 5 において $Z_n := \text{Spec } k[x]/(x^2)$ とすると, $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)} = \{O\}$.

Example 7 は *quasi-compact* でなく *reduced* でもないが $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる trivial な例である. そこで, non-reduced 構造の深さを表す不変量を導入して条件を緩めよう.

Definition 8. ring A の *non-reduced-degree* $d(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を次で定義する.

$$d(A) := \begin{cases} n & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (\text{nil } A)^{n-1} \neq 0, (\text{nil } A)^n = 0. \\ \infty & \text{if } \forall n \in \mathbb{N}, (\text{nil } A)^n \neq 0. \end{cases}$$

scheme X の *non-reduced-degree* $d(X)$ を $\sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\}$ で定義する.

X が *reduced* $\Leftrightarrow d(X) = 1$. (値が大きいくほど *reduced* の構造から遠い)

Theorem 3. $d(Z) < \infty$ ならば $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$. さらに, $d(Y) \leq d(Z)$ が成立する. 特に, Z が *reduced* ($d(Z) = 1$) ならば $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ かつ Y も *reduced* ($d(Y) = 1$) である.

一方, $d(Z) < \infty$ は貼り合わせ可能性や $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$ のための十分条件ではない.

Example 9. ($d(Z) < \infty$ だが $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ となる例)

$X := \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[x, y]$, $Z_n := \text{Spec } k[x, y]/(x^n y, xy^2)$, $f : Z := \coprod_{n=2}^{\infty} Z_n \rightarrow X$ (Figure 3).

このとき, $d(Z) = 2 < \infty$. $Y = \text{Spec } k[x, y]/(xy^2)$.

確かに, $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)} = V(xy)$, $d(Y) = 2 \leq d(Z) = 2$.

しかし, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ ($x \neq 0$ の部分で異なる).

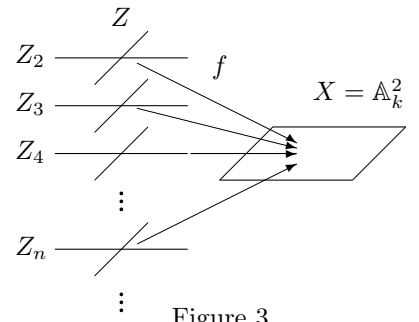


Figure 3.

参考文献

[H] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)