

Scheme-theoretic image の存在と構造

楫研究室
鈴木 拓

2010 年 2 月 8 日

Definition

schemes の morphism $f : Z \rightarrow X$ の **scheme-theoretic image** (**s.im.**) とは

f が経由するような X の最小の closed subscheme (**c.s.**) Y のこと

Definition

schemes の morphism $f : Z \rightarrow X$ の **scheme-theoretic image** (**s.im.**) とは

f が経由するような X の最小の closed subscheme (**c.s.**) Y のこと

- [H] において
 - "s.im. が一意に存在する"
 - " $\overline{f(Z)}$ に s.im. の構造を入れる"

と述べられている

- X が affine の場合には容易:

Proposition

$X = \text{Spec } A$ のとき, f に対応する hom を $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ として ideal $\ker \varphi$ に対応する X の c.s. Y が s.im. である

- X が affine の場合には容易:

Proposition

$X = \operatorname{Spec} A$ のとき, f に対応する hom を $\varphi: A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ として ideal $\ker \varphi$ に対応する X の c.s. Y が s.im. である

- 局所的に s.im. となるものを貼り合わせればよい?
- しかし...

- X が affine の場合には容易:

Proposition

$X = \operatorname{Spec} A$ のとき, f に対応する hom を $\varphi: A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ として ideal $\ker \varphi$ に対応する X の c.s. Y が s.im. である

- 局所的に s.im. となるものを貼り合わせればよい?
- しかし...
 - 貼り合わせ可能性を正当化できない?

- X が affine の場合には容易:

Proposition

$X = \operatorname{Spec} A$ のとき, f に対応する hom を $\varphi: A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ として ideal $\ker \varphi$ に対応する X の c.s. Y が s.im. である

- 局所的に s.im. となるものを貼り合わせればよい?
- しかし...
 - 貼り合わせ可能性を正当化できない?
 - $\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ を正当化できない?

- X が affine の場合には容易:

Proposition

$X = \operatorname{Spec} A$ のとき, f に対応する hom を $\varphi: A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ として ideal $\ker \varphi$ に対応する X の c.s. Y が s.im. である

- 局所的に s.im. となるものを貼り合わせればよい?
- しかし...
 - 貼り合わせ可能性を正当化できない?
 - $\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ を正当化できない?
- [H] の記述に間違いがある?

(a) s.im. が存在しない例はあるか？

- (a) s.im. が存在しない例はあるか？
- (b) $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ とならないような例はあるか？
 $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となるための条件は何か？

- (a) s.im. が存在しない例はあるか？
- (b) $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ とならないような例はあるか？
 $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となるための条件は何か？
- (c) ideal sheaf $\mathcal{I}_Y$ や structure sheaf $\mathcal{O}_Y$ は？

- 2 種類の構成法を得た:

- 2 種類の構成法を得た:
 - 局所的構成法:
 - 貼り合わせによる方法
 - f が quasi-compact or Z が reduced の条件で適用できる

- 2 種類の構成法を得た:

- 局所的構成法:

- 貼り合わせによる方法

- f が quasi-compact or Z が reduced の条件で適用できる

- 大域的構成法:

- 貼り合わせによらない方法

- 任意の f に対して適用できる

s.im. の一意性はすぐにわかる

2 つの構成法で得られるものは同じ

- 後者の構成法により, (a) は否定的に解決:

Theorem 1

任意の f に対して s.im. が存在する

- 後者の構成法により, (a) は否定的に解決:

Theorem 1

任意の f に対して s.im. が存在する

- 前者の構成法によりわかる結果から, (b),(c) への答えとして:

Theorem 2

f が quasi-compact or Z が reduced のとき

- $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$
- $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$
- $\mathcal{O}_Y = (\mathrm{im} f^\#)|_Y$

特に Z が reduced のとき Y も reduced

$f^\#$ とは structure sheaves の morphism $\mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$

- non-reduced-degree $d(X)$ という scheme の不変量を発見し $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる条件を一般化した:

Theorem 3

- $d(Z) < \infty$ ならば $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$
- $d(Y) \leq d(Z)$

- それぞれの条件の差を表す例として見つけたもの:

Example

quasi-compact でも reduced でもなくて

- $\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y \neq (\mathrm{im} f^\#)|_Y$ となる例
- 貼り合わせによる局所的構成法が使えない例
- $d(Z) < \infty$ であって, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ となる例

Example 5 ($\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$ の例)

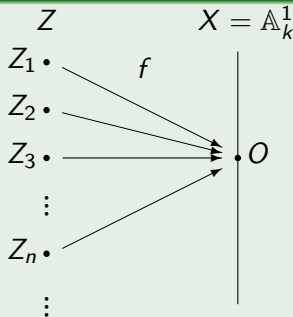
Example 5

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^n)$$

$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$



Example 5 ($\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$ の例)

Example 5

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^n)$$

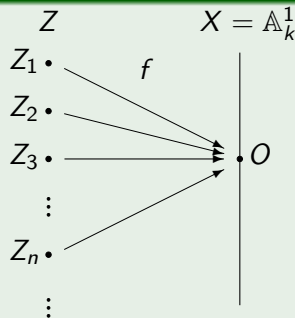
$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓このとき

$$Y = X \not\supseteq \overline{f(Z)} = \{O\}$$

$$\mathcal{I}_Y = 0 \neq \ker f^\#$$



● なぜ？

Example 5 ($\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$ の例)

Example 5

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^n)$$

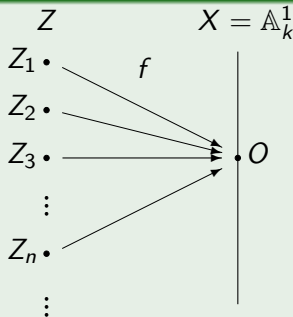
$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$Y = X \not\supseteq \overline{f(Z)} = \{O\}$$

$$\mathcal{I}_Y = 0 \neq \ker f^\#$$



- なぜ？

- scheme の同じ closed subset にはいくつもの (non-reduced な) subscheme の構造が入る

Example 5 ($\text{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$ の例)

Example 5

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$$

$$Z_n := \text{Spec } k[x]/(x^n)$$

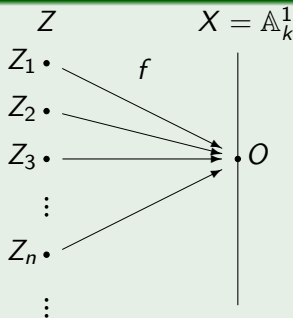
$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$Y = X \not\supseteq \overline{f(Z)} = \{O\}$$

$$\mathcal{I}_Y = 0 \neq \ker f^\#$$



● なぜ？

- scheme の同じ closed subset にはいくつもの (non-reduced な) subscheme の構造が入る
- non-reduced なものが無限個 (non-quasi-compact) あると $\{O\}$ から溢れる ($\sup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \infty$)

- それぞれの条件の差を表す例として見つけたもの:

Example

quasi-compact でも reduced でもなくて

- $\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y \neq (\mathrm{im} f^\#)|_Y$ となる例
- 貼り合わせによる局所的構成法が使えない例
- $d(Z) < \infty$ であって, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ となる例

Example 6 (貼り合わせ不可能な例)

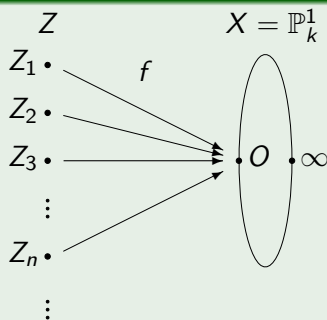
Example 6

$$X := \mathbb{P}_k^1 = \text{Proj } k[x, y]$$

$$Z_n := \text{Proj } k[x, y]/(x^n)$$

$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$



Example 6 (貼り合わせ不可能な例)

Example 6

$$X := \mathbb{P}_k^1 = \text{Proj } k[x, y]$$

$$Z_n := \text{Proj } k[x, y]/(x^n)$$

$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$X = \mathbb{P}_k^1$ は2つの open affine subsets

$$U_0 = D_+(y), \quad U_{\infty} = D_+(x)$$

で cover され

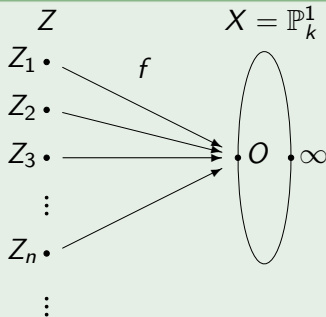
$f|_{f^{-1}(U_0)} : f^{-1}(U_0) = Z \rightarrow U_0$ の s.im. は U_0

$f|_{f^{-1}(U_{\infty})} : f^{-1}(U_{\infty}) = \emptyset \rightarrow U_{\infty}$ の s.im. は $\emptyset$

$U_0 \cap U_{\infty}$ でこれらは不一致

↓

貼り合わせ不可能



- それぞれの条件の差を表す例として見つけたもの:

Example

quasi-compact でも reduced でもなくて

- $\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y \neq (\mathrm{im} f^\#)|_Y$ となる例
- 貼り合わせによる局所的構成法が使えない例
- $d(Z) < \infty$ であって, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ となる例

Non-reduced-degree を用いた一般化

non-quasi-compact かつ non-reduced で $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる例:

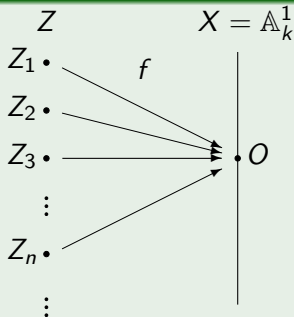
Example 7

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(\mathbf{x}^2)$$

$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$



Non-reduced-degree を用いた一般化

non-quasi-compact かつ non-reduced で $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる例:

Example 7

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

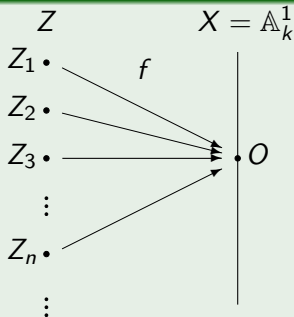
$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(\mathbf{x}^2)$$

$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$Y = \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$



Non-reduced-degree を用いた一般化

non-quasi-compact かつ non-reduced で $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる例:

Example 7

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$

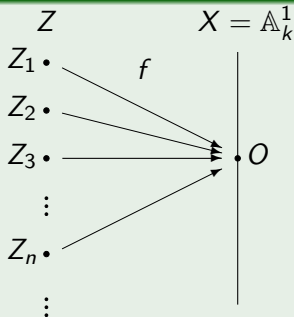
$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$Y = \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$

$$\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)} = \{O\}$$



- なぜ？

Non-reduced-degree を用いた一般化

non-quasi-compact かつ non-reduced で $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる例:

Example 7

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$

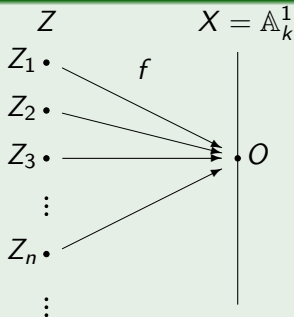
$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$Y = \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$

$$\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)} = \{O\}$$



- なぜ？

- reduced ("1 重の点") ではないものの "2 重の点" までに抑えられている ($\sup_{n=1}^{\infty} \{2\} = 2$)

Non-reduced-degree を用いた一般化

non-quasi-compact かつ non-reduced で $\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$ となる例:

Example 7

$$X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$$

$$Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$

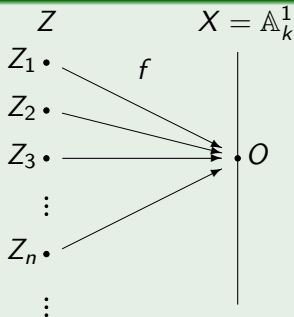
$$Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$Y = \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$$

$$\mathrm{sp}(Y) = \overline{f(Z)} = \{O\}$$



- なぜ?
 - reduced ("1 重の点") ではないものの "2 重の点" までに抑えられている ($\sup_{n=1}^{\infty} \{2\} = 2$)
- reduced という条件をもっと緩めることができそう
→ 不変量 non-reduced-degree の導入

Definition 8

ring A の *non-reduced-degree* $d(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を次で定義:

$$d(A) := \begin{cases} n & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (\text{nil } A)^{n-1} \neq 0, (\text{nil } A)^n = 0 \\ \infty & \text{if } \forall n \in \mathbb{N}, (\text{nil } A)^n \neq 0 \end{cases}$$

Non-reduced-degree を用いた一般化

Definition 8

ring A の *non-reduced-degree* $d(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を次で定義:

$$d(A) := \begin{cases} n & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (\text{nil } A)^{n-1} \neq 0, (\text{nil } A)^n = 0 \\ \infty & \text{if } \forall n \in \mathbb{N}, (\text{nil } A)^n \neq 0 \end{cases}$$

scheme X の *non-reduced-degree* $d(X)$ を次で定義:

$$d(X) := \sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\}$$

Definition 8

ring A の *non-reduced-degree* $d(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を次で定義:

$$d(A) := \begin{cases} n & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (\text{nil } A)^{n-1} \neq 0, (\text{nil } A)^n = 0 \\ \infty & \text{if } \forall n \in \mathbb{N}, (\text{nil } A)^n \neq 0 \end{cases}$$

scheme X の *non-reduced-degree* $d(X)$ を次で定義:

$$d(X) := \sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\}$$

- X が reduced $\Leftrightarrow d(X) = 1$

Definition 8

ring A の *non-reduced-degree* $d(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を次で定義:

$$d(A) := \begin{cases} n & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (\text{nil } A)^{n-1} \neq 0, (\text{nil } A)^n = 0 \\ \infty & \text{if } \forall n \in \mathbb{N}, (\text{nil } A)^n \neq 0 \end{cases}$$

scheme X の *non-reduced-degree* $d(X)$ を次で定義:

$$d(X) := \sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\}$$

- X が reduced $\Leftrightarrow d(X) = 1$
- 値が大きいほど reduced の構造から遠い

- 計算例:
 - $X := \operatorname{Spec} k[x]/(x^n)$ のとき $d(X) = n$

- 計算例:

- $X := \operatorname{Spec} k[x]/(x^n)$ のとき $d(X) = n$
- $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Spec} k[x]/(\textcolor{red}{x}^n)$ のとき $d(Z) = \infty$ ($\operatorname{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$)
- $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Spec} k[x]/(\textcolor{red}{x}^2)$ のとき $d(Z) = \textcolor{red}{2}$ ($\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$)

- 計算例:

- $X := \operatorname{Spec} k[x]/(x^n)$ のとき $d(X) = n$
- $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Spec} k[x]/(\textcolor{red}{x}^n)$ のとき $d(Z) = \infty$ ($\operatorname{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$)
- $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Spec} k[x]/(\textcolor{red}{x}^2)$ のとき $d(Z) = \textcolor{red}{2}$ ($\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$)

Theorem 3

- $d(Z) < \infty$ ならば $\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$
特に Z が reduced ($d(Z) = 1$) ならば $\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$

- 計算例:

- $X := \operatorname{Spec} k[x]/(x^n)$ のとき $d(X) = n$
- $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Spec} k[x]/(\mathbf{x}^n)$ のとき $d(Z) = \infty$ ($\operatorname{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$)
- $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Spec} k[x]/(\mathbf{x}^2)$ のとき $d(Z) = 2$ ($\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$)

Theorem 3

- $d(Z) < \infty$ ならば $\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$
特に Z が reduced ($d(Z) = 1$) ならば $\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$
- $d(Y) \leq d(Z)$
特に Z が reduced ($d(Z) = 1$) ならば Y も reduced ($d(Y) = 1$)

Non-reduced-degree を用いた一般化

- $d(Z) < \infty$ という条件で
 - 貼り合わせ可能？
 - $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$?

Non-reduced-degree を用いた一般化

- $d(Z) < \infty$ という条件で
 - 貼り合わせ可能？
 - $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$?
- No !

Non-reduced-degree を用いた一般化

- $d(Z) < \infty$ という条件で
 - 貼り合わせ可能？
 - $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$?
- No !

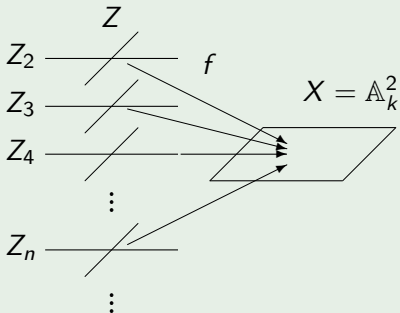
Example 9

$$X := \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$$

$$Z_n := \operatorname{Spec} k[x, y]/(\textcolor{red}{x}y^n, \textcolor{red}{x}^2y)$$

$$Z := \coprod_{n=2}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$



Non-reduced-degree を用いた一般化

- $d(Z) < \infty$ という条件で
 - 貼り合わせ可能？
 - $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$?
- No !

Example 9

$$X := \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$$

$$Z_n := \operatorname{Spec} k[x, y]/(\textcolor{red}{xy}^n, \textcolor{red}{x}^2y)$$

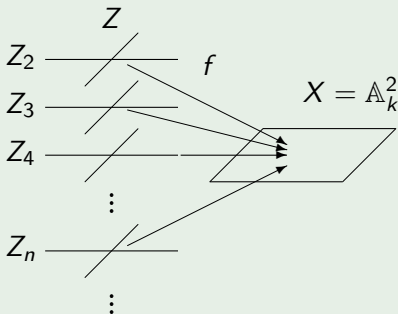
$$Z := \coprod_{n=2}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

↓ このとき

$$\textcolor{red}{d(Z)} = 2 < \infty$$

$$Y = \operatorname{Spec} k[x, y]/(x^2y)$$



Non-reduced-degree を用いた一般化

- $d(Z) < \infty$ という条件で
 - 貼り合わせ可能?
 - $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$?
- No !

Example 9

$$X := \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$$

$$Z_n := \operatorname{Spec} k[x, y]/(\textcolor{red}{xy}^n, \textcolor{red}{x}^2\textcolor{red}{y})$$

$$Z := \coprod_{n=2}^{\infty} Z_n$$

$$f : Z \rightarrow X$$

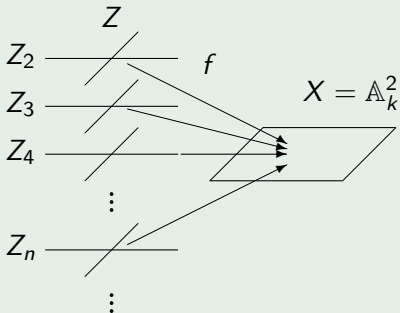
↓ このとき

$$\textcolor{red}{d(Z)} = 2 < \infty$$

$$Y = \operatorname{Spec} k[x, y]/(\overline{x^2 y})$$

$$\operatorname{sp}(Y) = \overline{f(Z)} = V(xy)$$

$$d(Y) = 2 \leq d(Z) = 2$$



Non-reduced-degree を用いた一般化

- $d(Z) < \infty$ という条件で
 - 貼り合わせ可能？
 - $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$?
- No !

Example 9

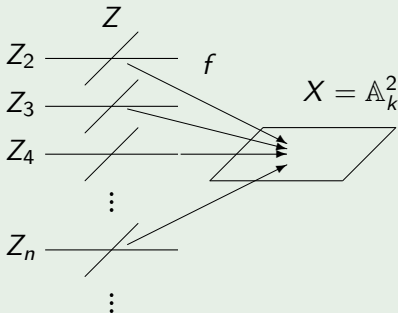
$$\begin{aligned} X &:= \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x, y] \\ Z_n &:= \operatorname{Spec} k[x, y]/(\textcolor{red}{xy}^n, \textcolor{red}{x}^2\textcolor{red}{y}) \\ Z &:= \coprod_{n=2}^{\infty} Z_n \\ f &: Z \rightarrow X \end{aligned}$$

↓ このとき

$$\textcolor{red}{d}(Z) = 2 < \infty$$

$$\begin{aligned} Y &= \operatorname{Spec} k[x, y]/(\overline{x^2 y}) \\ \operatorname{sp}(Y) &= \overline{f(Z)} = V(xy) \\ d(Y) &= 2 \leq d(Z) = 2 \end{aligned}$$

しかし $\textcolor{red}{\mathcal{I}_Y} \neq \ker f^\#$ ($x \neq 0$ の部分で異なる)



- それぞれの条件の差を表す例として見つけたもの:

Example

quasi-compact でも reduced でもなくて

- $\mathrm{sp}(Y) \neq \overline{f(Z)}$, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y \neq (\mathrm{im} f^\#)|_Y$ となる例
- 貼り合わせによる局所的構成法が使えない例
- $d(Z) < \infty$ であって, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$ となる例

- [A-M] M.F.Atiyah, I.G.MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969)
- [G-D.1] A.Grothendieck, J.Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I. Le langage des schémas*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S.4 (1960)
- [G-D.2] A.Grothendieck, J.Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S.8 (1961)
- [H] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)
- [M] H.Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press (1986)

まとめ

(1) f :任意

s.im. Y が一意に存在
 $d(Y) \leq d(Z)$

(2) f :quasi-compact or $d(Z) < \infty$
 $\text{sp}(Y) = \overline{f(Z)}$

(1)\(2) では成立しない例有

(3) f :quasi-compact or $d(Z) = 1$

局所的構成可

$$\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$$

$$\mathcal{O}_Y = (\text{im } f^\#)|_Y$$

(2)\(3) では成立しない例有

f :任意

