

Scheme-theoretic image の存在と構造

2009 年度 卒業論文

早稲田大学理工学部数理科学科

1G06L039-4

鈴木 拓

指導教員名 楫 元

概要

本論文は, schemes の morphism における scheme-theoretic image の存在を 2 種類の構成法で示し, また, それがあある種の良い構造を持つための十分条件を与えたものである. さらに, scheme の non-reduced 構造の深さを表す不変量を発見し, それを用いて一般化を与えた.

目次

1 序文	2
2 Scheme の定義および基本事項	4
2.1 Scheme	4
2.2 Proj	6
2.3 貼り合わせ	7
2.4 Closed immersion	8
2.5 Reduced	9
2.6 Quasi-compact	9
3 Scheme-theoretic image の定義と一意性	11
3.1 定義	11
3.2 一意性	11
4 局所的構成	12
4.1 X が affine の場合	12
4.2 貼り合わせのための十分条件	15
4.3 貼り合わせによる構成	18
4.4 Structure sheaf についての考察	21
5 大域的構成	23
5.1 Quasi-coherent	23
5.2 大域的構成	24
5.3 Example	26
6 Non-reduced-degree を用いた一般化	29
6.1 Non-reduced-degree の導入	29
6.2 一般化	32
6.3 貼り合わせ可能性および ideal sheaf についての考察	35

1 序文

schemes の morphism $f: Z \rightarrow X$ の scheme-theoretic image とは, f が經由するような X の最小の closed subscheme のことである. [H] において, "任意の morphism に対して scheme-theoretic image が一意に存在する"と述べられており¹, その後の別の議論で度々使われている². このことは X が affine の場合には容易にわかる (Proposition 4.1). そこで, X が一般の scheme の場合の構成法を考える際, 局所的な scheme-theoretic images を貼り合わせるという方法が自然に考えられる. しかし, 一般の f について貼り合わせはうまくいかない.

また, [H] において別の議論で scheme-theoretic image を用いる際, " $\overline{\text{im } f}$ に scheme-theoretic image の構造を入れる" という形で述べられている. 確かに, topological space として考えれば continuous map $f: Z \rightarrow X$ が經由するような X の最小の closed subset は $\overline{\text{im } f}$ である. しかし, scheme として考えたとき, scheme-theoretic image が存在したとしてもその underlying topological space が $\overline{\text{im } f}$ となることを正当化できない.

そこで, [H] の記述に間違いがあるのではないかと疑問に思い, 以下のことについて考察した:

Question.

- (a) scheme-theoretic image が存在しない例はあるか.
- (b) underlying topological space が $\overline{\text{im } f}$ とならないような例はあるか.
また, $\overline{\text{im } f}$ となるための条件は何か.
- (c) structure sheaf はどう表せるか.

結果として, 局所的方法 (Theorem 4.10) および大域的方法 (Theorem 5.14) の 2 種類の scheme-theoretic image の構成法を得た. 前者は " f が quasi-compact または Z が reduced" という条件の下での貼り合わせによる構成法であり, 後者は任意の f について適用できる貼り合わせによらない構成法である. 後者の結果より (a) については否定的に解決した. また, 前者の構成法によりわかる結果から, (c) に対する答えとして, 同じ条件の仮定の下で ideal sheaf が $\ker f^\#$, structure sheaf が $\text{im } f^\#$ (を制限したもの) と表せることがわかった (Theorem 4.16). これらは, 局所的に見ても scheme-theoretic image になっていることを意味し, その意味で "良い" 構造といえる. また, (b) に対する答えとしては, 同じ条件の下で underlying topological space が $\overline{\text{im } f}$ となるという結論を得られる (Theorem 4.11) が, non-reduced-degree という不変量を導入することで, 十分条件をさらに緩められることを発見した (Theorem 6.10).

¹[H] II Exercise 3.11(d). 証明は記載されていない.

²例えば, II Lemma 4.5, II Exercise 4.4, II Exercise 4.10 など.

結論をまとめると以下の通りである:

Main Theorem.

- 任意の schemes の morphism $f : Z \rightarrow X$ に対して, f の scheme-theoretic image Y が一意に存在する.
- f が quasi-compact または Z が reduced という条件を加えると, Y の underlying topological space $\text{sp}(Y)$, ideal sheaf $\mathcal{I}_Y$, structure sheaf $\mathcal{O}_Y$ について,

$$\begin{aligned}\text{sp}(Y) &= \overline{\text{im } f} \\ \mathcal{I}_Y &= \ker f^\# \\ \mathcal{O}_Y &= (\text{im } f^\#)|_Y\end{aligned}$$

が成立する.

- $\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$ が成立するための十分条件は, Z の non-reduced-degree が有限であるという条件まで緩めることができる. さらに, Y の non-reduced-degree は Z の non-reduced-degree 以下である.

また, それぞれの条件の差を示す例として, f が quasi-compact でなく Z が reduced でもない場合で以下のようなものを見つけることに成功した:

- 局所的構成法が使えない例 (Example 4.12).
- $\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$, $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$, $\mathcal{O}_Y = (\text{im } f^\#)|_Y$, が成立しない例 (Example 4.3, 4.17).
- Z の non-reduced-degree が有限であって, $(\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f} \text{ となるが})$ $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$ が成立しない例 (Example 6.13).

2 Scheme の定義および基本事項

本節では scheme の定義と次節以降で用いる基本事項を確認しておく．定義は [H] に準拠している．また，可換代数の基本事項については [A-M] や [M] を参照とし，sheaf に関する知識は [H] を参照とする．以下，*ring* とは単位元 1 を持つ commutative ring を表す．

2.1 Scheme

Definition 2.1. topological space X と X 上の sheaf of rings $\mathcal{O}_X$ の対 $(X, \mathcal{O}_X)$ を *ringed space* という．特に，各点 $P \in X$ での stalk $\mathcal{O}_{X,P}$ が local ring であるとき，*locally ringed space* という．

locally ringed spaces $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の *morphism* とは，continuous map $f : X \rightarrow Y$ と Y 上の sheaves of rings の morphism $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ で各点 $P \in X$ に対して誘導される homomorphism $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ が local homomorphism であるものの対 $(f, f^\#)$ のことである．ここで，local rings $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ に対して homomorphism $\varphi : A \rightarrow B$ が *local homomorphism* であるとは， $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$ を満たすときをいう．

locally ringed spaces の morphisms $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y), (g, g^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ の *composition* $(g, g^\#) \circ (f, f^\#)$ は $(g \circ f, g_* f^\# \circ g^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ で定義される．

Definition 2.2. ring A に対して A の prime ideals の全体を $\text{Spec } A$ と書く． A の ideal $\mathfrak{a}$ に対して $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ を $V(\mathfrak{a})$ と書く． $V(\mathfrak{a})$ の形の subset を $\text{Spec } A$ の closed subset と定義することで， $\text{Spec } A$ は topological space になる (下の Lemma 2.3)． $f \in A$ に対して open subset $\text{Spec } A - V((f))$ を $D(f)$ と書く．

$\text{Spec } A$ 上の sheaf of rings $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ を次で定義する：各 open subset $U \subseteq \text{Spec } A$ に対して，

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) := \{s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \mid \text{(i), (ii) を満たす}\}.$$

ただし，

- (i) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$.
- (ii) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $\mathfrak{p}$ の open neighborhood V および $a, f \in A$ が存在して各点 $\mathfrak{q} \in V$ で $f \notin \mathfrak{q}$ かつ $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $A_{\mathfrak{q}}$.

このとき， $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$ に自然な ring の構造が入り， $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ に自然な restriction map が定義され， $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ は locally ringed space になる (下の Lemma 2.4(a))．これを A の *spectrum* という．

Lemma 2.3. A を ring とし, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i$ を A の ideals とするとき,

- (a) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
- (b) $\bigcap V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum \mathfrak{a}_i)$.
- (c) $\emptyset = V(A)$, $\text{Spec } A = V((0))$.
- (d) $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Proof. [H] II Lemma 2.1. □

Lemma 2.4. A を ring, $X := \text{Spec } A$ とするとき,

- (a) $\mathfrak{p} \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.
- (b) $f \in A$ に対して $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong A_f$.
- (c) $\mathcal{O}_X(X) \cong A$.
- (d) $\{D(f)\}_{f \in A}$ は X の open base を成す.

Proof. [H] II Proposition 2.2. □

Lemma 2.5. A を ring, $X := \text{Spec } A$, $f \in A$ とするとき,

$$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong \text{Spec } A_f.$$

Proof. [H] II Exercise 2.1. または, [G-D.1] Proposition 1.3.6. □

Definition 2.6. locally ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ で, ある ring の spectrum と (locally ringed spaces として) isomorphic であるものを *affine scheme* という.

locally ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ で, open covering $\{U_i\}_{i \in I}$ を持ち, 各 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ が affine scheme であるものを *scheme* といい, これを単に X とも書く. このとき topological space X を *underlying topological space* といい $\text{sp}(X)$ と書く. また $\mathcal{O}_X$ を *structure sheaf* という.

schemes の *morphism* とは locally ringed spaces の morphism $(f, f^\#)$ のことであり, これを単に f とも書く.

Lemma 2.7. A を ring, X を scheme とするとき, 自然な bijection

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{ch}}(X, \text{Spec } A) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{R}\mathfrak{ings}}(A, \mathcal{O}_X(X)) \\ f &\mapsto f^\#(\text{Spec } A) \end{aligned}$$

が存在する.

Proof. [H] II Exercise 2.4 または, [G-D.1] Proposition 2.2.4. □

Lemma 2.8. A, B を rings, $X := \operatorname{Spec} A, Y := \operatorname{Spec} B$ とする. schemes の morphism $f : X \rightarrow Y$ に対応する ring homomorphism (Lemma 2.7) を $\varphi : B \rightarrow A$ とする. このとき,

- (a) A の任意の ideal $\mathfrak{a}$ に対して, $\overline{f(V(\mathfrak{a}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$.
- (b) B の任意の ideal $\mathfrak{b}$ に対して, $f^{-1}(V(\mathfrak{b})) = V((\varphi(\mathfrak{b})))$.
- (c) 任意の $b \in B$ に対して, $f^{-1}(D(b)) = D(\varphi(b))$.

Proof. [A-M] 1 Exercise 21 または, [G-D.1] Proposition 1.2.2. □

Definition 2.9. scheme X の *open subscheme* とは scheme U で $\operatorname{sp}(U)$ が X の open subset かつ $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ となるもののことである. Lemma 2.4(d), 2.5 より, X の任意の open subset は一意に open subscheme の構造をもつことに注意する. このとき, 自然に morphism $i : U \rightarrow X$ が定まる ($i^\#$ は $i^\#(V) : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(V \cap U)$ を restriction map とすることで定義される). これを *open immersion* という.

2.2 Proj

Definition 2.10. $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ を graded ring とする. S の homogeneous prime ideal $\mathfrak{p}$, S の homogeneous element f に対して, $S_{\mathfrak{p}}, S_f$ の 0 次の元全体を $S_{(\mathfrak{p})}, S_{(f)}$ と書く.

S の $S_+ := \bigoplus_{d > 0} S_d$ を含まない homogeneous prime ideals の全体を $\operatorname{Proj} S$ と書く. S の homogeneous ideal $\mathfrak{a}$ に対して $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ を $V(\mathfrak{a})$ と書く. $V(\mathfrak{a})$ の形の subset を $\operatorname{Proj} S$ の closed subset と定義することで, $\operatorname{Proj} S$ は topological space になる (下の Lemma 2.11). homogeneous element $f \in S$ に対して open subset $\operatorname{Proj} S - V((f))$ を $D_+(f)$ と書く.

$\operatorname{Proj} S$ 上の sheaf of rings $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}$ を次で定義する: 各 open subset $U \subseteq \operatorname{Proj} S$ に対して,

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(U) = \{s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})} \mid (i), (ii) \text{ を満たす } \}.$$

ただし,

- (i) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$.
- (ii) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $\mathfrak{p}$ の open neighborhood V および $d \in \mathbb{Z}, a, f \in S_d$ が存在して各点 $\mathfrak{q} \in V$ で $f \notin \mathfrak{q}$ かつ $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $S_{(\mathfrak{q})}$.

このとき, $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ は scheme になる (下の Lemma 2.12).

Lemma 2.11. S を graded ring とし, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i$ を S の homogeneous ideals とするとき,

- (a) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab})$.
- (b) $\bigcap V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum \mathfrak{a}_i)$.
- (c) $\emptyset = V(S_+)$, $\text{Proj } S = V((0))$.

Proof. [H] II Lemma 2.4. □

Lemma 2.12. S を graded ring, $X = \text{Proj } S$ とするとき,

- (a) $\mathfrak{p} \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$.
- (b) homogeneous element $f \in S$ に対して,

$$(D_+(f), \mathcal{O}_X|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec } S_{(f)}.$$

Proof. [H] II Proposition 2.5. □

2.3 貼り合わせ

Lemma-Definition 2.13. schemes $\{X_i\}_{i \in I}$, 各 $i \neq j$ に対して open subsets U_{ij} , および isomorphisms $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ で, 次を満たすものが与えられているとする:

- (i) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1} \quad (\forall i, j)$.
- (ii) $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk} \quad (\forall i, j, k)$.
- (iii) $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ on $U_{ij} \cap U_{ik} \quad (\forall i, j, k)$.

このとき, scheme X および各 i に対して open immersions $\psi_i : X_i \rightarrow X$ で次を満たすものが存在する:

- (i) $\{\psi_i(X_i)\}_{i \in I}$ は X の open covering.
- (ii) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j) \quad (\forall i, j)$.
- (iii) $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ on $U_{ij} \quad (\forall i, j)$.

X を $\{X_i\}_i$ の $\{\varphi_{ij}\}_{ij}$ に沿った貼り合わせという. 特に $U_{ij} = \emptyset \quad (\forall i, j)$ のとき, X を $\{X_i\}_i$ の disjoint union といい, $\coprod_{i \in I} X_i$ と書く.

Proof. [H] Exercise 2.12. □

Lemma 2.14. X, Y を schemes とする.

- (a) $f, g : X \rightarrow Y$ を morphisms とし, X の open covering $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して $f|_{U_i} = g|_{U_i} (\forall i)$ を満たすとする. このとき, $f = g$.
- (b) X の open covering $\{U_i\}_{i \in I}$ と各 i に対して morphisms $f_i : U_i \rightarrow Y$ で, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} (\forall i, j)$ を満たすものが与えられているとする. このとき, morphism $f : X \rightarrow Y$ で $f|_{U_i} = f_i (\forall i)$ を満たすものが存在する.

Proof. [H] II Theorem 3.3 Step3. □

2.4 Closed immersion

Definition 2.15. morphism $f : Y \rightarrow X$ が closed immersion であるとは, $\text{sp}(Y)$ から $\text{sp}(X)$ の closed subset への homeomorphism を誘導し, さらに $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ が surjective であるときをいう. scheme X の closed subscheme とは X への closed immersions の同値類である. ただし, $f : Y \rightarrow X$ と $f' : Y' \rightarrow X$ が同値であるとは, isomorphism $i : Y' \rightarrow Y$ で $f' = f \circ i$ を満たすものが存在するときをいう. 一般に, scheme の closed subset にはいくつもの closed subscheme の構造が入ることに注意する.

Lemma 2.16. $f : Y \rightarrow X$ を schemes の morphism とする.

- (a) f が closed immersion のとき, 任意の open subset $U \subseteq X$ に対して $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ も closed immersion である.
- (b) X の open covering $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ が closed immersion $(\forall i)$ になるとき, f も closed immersion である.

Proof. [G-D.1] Corollaire 4.2.4 b). □

Lemma 2.17.

- (a) A を ring, $X := \text{Spec } A$ とするとき, A の ideals 全体と X の closed subschemes 全体には $\mathfrak{a} \mapsto \text{Spec } A/\mathfrak{a}$ なる 1 対 1 対応がある.
- (b) S を graded ring, $X := \text{Proj } S$, $\mathfrak{a}$ を S の homogeneous ideal とするとき, $\text{Proj } S/\mathfrak{a}$ は自然に X の closed subscheme になる.

Proof. (a): [H] II Exercise 3.11(b) または, [H] II Corollary 5.10. (b): [H] II Exercise 3.12(b) または, [G-D.2] Proposition 2.9.2. □

Lemma 2.18. $g : Y \rightarrow X$ を closed immersion, $h, h' : Z \rightarrow Y$ を morphisms とし, $g \circ h = g \circ h'$ とする. このとき, $h = h'$.

Proof. set-theoretic map として $g \circ h = g \circ h'$ であるから, g の injectivity より set-theoretic map として $h = h'$. また, $g_* h^\# \circ g^\# = g_* h'^\# \circ g^\#$ であるから, $g^\#$ の surjectivity より $g_* h^\# = g_* h'^\#$. ゆえに, $h^\# = g^{-1} g_* h^\# = g^{-1} g_* h'^\# = h'^\#$. したがって, schemes の morphism として $h = h'$. $\square$

2.5 Reduced

Definition 2.19. ring A の nilradical を $\text{nil } A$ と書く. $\text{nil } A = 0$ のとき ring A は *reduced* であるという. scheme X が *reduced* とは, 任意の open subset $U \subseteq X$ に対して $\mathcal{O}_X(U)$ が reduced になるときをいう. これは各点 $P \in X$ での stalk $\mathcal{O}_{X,P}$ が reduced になることと同値であることに注意する³.

2.6 Quasi-compact

Definition 2.20. scheme X が *quasi-compact* であるとは, topological space $\text{sp}(X)$ が quasi-compact であるとき, すなわち任意の open covering が finite subcovering を持つときをいう.

Lemma 2.21.

- (1) affine scheme は quasi-compact.
- (2) scheme X が quasi-compact であるための必要十分条件は X が finite open affine covering を持つことである.

Proof. (a): $X := \text{Spec } A$ とし, $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の任意の open covering とする. 各 U_i は A の ideal $\mathfrak{a}_i$ によって $X - V(\mathfrak{a}_i)$ と表せるが, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ より $V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \emptyset$. ゆえに, $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = A$. よって, $\sum_{n=1}^N a_{i_n} = 1$ ($a_{i_n} \in \mathfrak{a}_{i_n}$) と表せる. このとき, $\sum_{n=1}^N \mathfrak{a}_{i_n} = A$ ゆえ $\bigcup_{n=1}^N U_{i_n} = X$ である.

(b): scheme の定義から X は open affine covering $\{U_i\}_{i \in I}$ を持つが, X が quasi-compact であるとする, その中から finite subcovering がとれる. 逆に, X が finite open affine covering $\{U_i\}_{i=1}^N$ を持つとする. $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の任意の open covering とする. 各 i に対して, (a) より U_i は quasi-compact であり $U_i \subseteq X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ だから $U_i \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_i} V_\lambda$ (Λ_i は Λ の finite subset) と表せる. このとき, $\Lambda' := \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$ も Λ の finite subset で $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda$ である. よって, X は quasi-compact. $\square$

Definition 2.22. schemes の morphism $f : X \rightarrow Y$ が *quasi-compact* であるとは, Y が open affine covering $\{V_j\}_{j \in J}$ を持ち, 各 j に対して $f^{-1}(V_j)$ が quasi-compact であるときをいう.

³[H] II Exercise 2.3.

Lemma 2.23. schemes の morphism $f : X \rightarrow Y$ が quasi-compact であるための必要十分条件は, Y の任意の open affine subset V に対して $f^{-1}(V)$ が quasi-compact となることである.

Proof. 十分性は scheme の定義から明らかなので, 必要性を示す.

まず, 次を示す: open affine $W (= \text{Spec } C) \subseteq Y$ について $f^{-1}(W)$ が quasi-compact となるとき, $\forall h \in C$ に対して $f^{-1}(D(h))$ も quasi-compact となる. 実際, Lemma 2.21(b) より $f^{-1}(W)$ は finite open affine covering $\{U_i (= \text{Spec } A_i)\}_{i=1}^N$ を持つ. $f|_{U_i} : U_i \rightarrow W$ に対応する ring homomorphism を $\varphi_i : C \rightarrow A_i$ とすると, $f^{-1}(D(h)) \cap U_i = (f|_{U_i})^{-1}(D(h)) = D(\varphi_i(h))$ (Lemma 2.8(c)) は affine (Lemma 2.5) であり, $f^{-1}(D(h))$ を cover する. よって, Lemma 2.21(b) より $f^{-1}(D(h))$ は quasi-compact.

さて, f が quasi-compact であるとする. このとき, Definition 2.22, Lemma 2.4(d), および上で示したことより, open affine $W \subseteq Y$ で $f^{-1}(W)$ が quasi-compact となるものの全体が Y の open base を成す. そこで, 任意の open affine $V \subseteq Y$ は, open affine covering $\{W_k\}_{k \in K}$ で各 $f^{-1}(W_k)$ が quasi-compact となるものを持つ. ここで, Lemma 2.21(a) より V は quasi-compact だから $\#K < \infty$ としてよい. 各 $f^{-1}(W_k)$ は finite open affine covering $\{U_{ki}\}_{i \in I_k}$ を持つので, $f^{-1}(V) = \bigcup_{k \in K} f^{-1}(W_k)$ は finite open affine covering $\{U_{ki}\}_{k \in K, i \in I_k}$ を持つ, すなわち quasi-compact である. $\square$

3 Scheme-theoretic image の定義と一意性

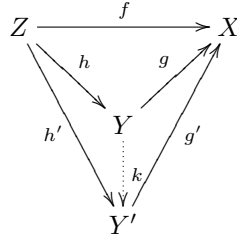
3.1 定義

Definition 3.1. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism とする. Y を X の closed subscheme とし, $g : Y \rightarrow X$ を closed immersion とする. f に対して Y が $(g$ が) 次の条件を満たすとき, Y は f の *scheme-theoretic image* であるという:

- (1) f が Y を $(g$ を) 一意に経由する.
- (2) f が別の closed subscheme Y' を (closed immersion g' を) 経由するとき, g も Y' を $(g'$ を) 一意に経由する.

より正確に述べると次のようになる:

- (1) $\exists!$ morphism $h : Z \rightarrow Y$ s.t. $f = g \circ h$.
- (2) closed immersion $g' : Y' \rightarrow X$ で $\exists$ morphism $h' : Z \rightarrow Y'$ s.t. $f = g' \circ h'$ を満たすものに対して, $\exists!$ morphism $k : Y \rightarrow Y'$ s.t. $g = g' \circ k$.



Remark 3.2. (1) および (2) における経由の一意性は, closed immersion の性質 (Lemma 2.18) より常に成立する.

3.2 一意性

scheme-theoretic image の一意性は, 普遍性質 (1),(2) からすぐにわかるのでここで示しておく.

Proposition 3.3. $f : Z \rightarrow X$ を morphism とする. 2つの closed immersions $g : Y \rightarrow X, g' : Y' \rightarrow X$ が f の scheme-theoretic image を与えるとする. このとき, $Y \cong Y'$ (X の closed immersions として) が成立する.

Proof. g' の性質 (1) より f は g' を経由するので, g の性質 (2) より morphism $k : Y \rightarrow Y'$ で $g = g' \circ k$ を満たすものが一意に存在する. 逆に, g の性質 (1) より f は g を経由するので, g' の性質 (2) より morphism $k' : Y' \rightarrow Y$ で $g' = g \circ k'$ を満たすものが一意に存在する. このとき, $g = g \circ k' \circ k, g' = g' \circ k \circ k'$. Lemma 2.18 より $id_Y = k' \circ k, id_{Y'} = k \circ k'$. ゆえに, k は isomorphism. したがって, X の closed immersions として $Y \cong Y'$. $\square$

4 局所的構成

以下, scheme-theoretic image の存在について考察する. 本節では, 局所的に性質を満たすものを貼り合せるという方法で存在を示す. 以下でわかるように, 貼り合せるためには f に条件が必要である. また, underlying topological space および structure sheaf についても考察する.

4.1 X が affine の場合

まず, X が affine の場合を考察する. この場合, 次のように容易に構成できる.

Proposition 4.1. A を ring, $X := \text{Spec } A$ とする. $f : Z \rightarrow X$ を morphism とし, f に対応する ring homomorphism (Lemma 2.7) を $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ とする. このとき, A の ideal $\ker \varphi$ に対応する X の closed subscheme (Lemma 2.17(a)) Y は f の scheme-theoretic image である.

Proof. $\psi : A \rightarrow A/\ker \varphi$ を自然な homomorphism とする. このとき, ψ に対応する schemes の morphism $g : Y \rightarrow X$ が closed immersion である.

(1): $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ は $\bar{\varphi} : A/\ker \varphi \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ を誘導する. すなわち, $\varphi = \bar{\varphi} \circ \psi$ であり, φ は ψ を経由する. よって, f は g を経由する (Lemma 2.7).

(2): $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ が A のある ideal $\mathfrak{a}$ に対して自然な homomorphism $\psi' : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ を経由したとする. このとき, $\mathfrak{a} = \ker \psi' \subseteq \ker \varphi$ より, $\psi : A \rightarrow A/\ker \varphi$ は $\bar{\psi} : A/\mathfrak{a} \rightarrow A/\ker \varphi$ を誘導する. すなわち, $\psi = \bar{\psi} \circ \psi'$ であり, ψ は ψ' を経由する. よって, $f : Z \rightarrow X$ が別の closed immersion $g' : Y' \rightarrow X$ を経由するとき, g は g' を経由する (Lemma 2.7, 2.17(a)). $\square$

次に, 存在の証明からは離れることになるが, X が affine の場合に Proposition 4.1 で得られる Y の underlying topological space $\text{sp}(Y)$ について考察しておく.

Proposition 4.2. Proposition 4.1 の仮定の下で,

$$(a) \text{ sp}(Y) \supseteq \overline{\text{im } f}.$$

$$(b) Z \text{ が quasi-compact または reduced であるとき, } \text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}.$$

ただし, " $\overline{}$ " は X での closure を表す.

Proof. 記号は Proposition 4.1 の証明と同じものを使用する.

$$(a): Y = \text{im } g \supseteq \text{im } (g \circ h) = \text{im } f. \text{ 両辺 closure をとれば, } Y \supseteq \overline{\text{im } f}.$$

(b): Z の open affine covering $\{W_k\}_{k \in K}$ をとる. $\rho_k : \mathcal{O}_Z(Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z(W_k)$ を restriction map とすると, $f|_{W_k} : W_k \rightarrow X$ に対応する ring homomorphism は $\rho_k \circ \varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(W_k)$ である. ゆえに,

$$\begin{aligned} \overline{\text{im } f} &= \overline{f\left(\bigcup_{k \in K} W_k\right)} \\ &\supseteq \bigcup_{k \in K} \overline{f(W_k)} \\ &= \bigcup_{k \in K} \overline{f|_{W_k}(V(0))} \\ &= \bigcup_{k \in K} V((\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)). \end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{O}_Z$ は sheaf なので, $\forall s \in \mathcal{O}_Z(Z)$ に対して $s|_{W_k} = 0 (\forall k) \Leftrightarrow s = 0$ を満たす. すなわち, $\bigcap_{k \in K} \rho_k^{-1}(0) = \{0\}$ in $\mathcal{O}_Z(Z)$ であるから,

$$\begin{aligned} Y &= V(\varphi^{-1}(0)) \\ &= V(\varphi^{-1}\left(\bigcap_{k \in K} \rho_k^{-1}(0)\right)) \\ &= V\left(\bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)\right). \end{aligned}$$

まず, Z が quasi-compact とすると, $\#K < \infty$ としてよく,

$$\bigcup_{k \in K} V((\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)) = V\left(\bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)\right).$$

よって, $\overline{\text{im } f} \supseteq Y$.

次に, Z が reduced とすると, $\sqrt{0} = 0$ in $\mathcal{O}_Z(W_k)$. A の ideal $\mathfrak{a}$ によって, $\overline{\text{im } f} = V(\mathfrak{a})$ と表しておく. このとき, 各 $k \in K$ に対して, $V(\mathfrak{a}) \supseteq V((\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0))$ より,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{a}} &\subseteq \sqrt{(\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)} \\ &= (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(\sqrt{0}) \\ &= (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0). \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{a}} &\subseteq \bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0), \\ V(\sqrt{\mathfrak{a}}) &\supseteq V\left(\bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)\right). \end{aligned}$$

よって, $\overline{\text{im } f} = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \supseteq Y$.

したがって, (a) と合わせれば, Z が quasi-compact または reduced のとき $Y = \overline{\text{im } f}$. □

Z が quasi-compact でなく reduced でもないとき, $\mathrm{sp}(Y) \supsetneq \overline{\mathrm{im} f}$ となる場合がある. それが次の例である.

Example 4.3. k を field とし, $X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$ とする. また, $Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. これらは $\mathbb{A}_k^1$ の原点 O にさまざまな構造を入れた closed subschemes であり, $n \geq 2$ で reduced でない. これらの disjoint union (Definition 2.13) をとって, $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$ とする. $\mathrm{sp}(Z)$ は無限個の点に discrete topology が入ったものなので quasi-compact ではないことに注意する. $f_n : Z_n \rightarrow X$ ($n = 1, 2, \dots$) を closed immersion とし, $f := \coprod_{n=1}^{\infty} f_n : Z \rightarrow X$ とする (Figure 1 参照).

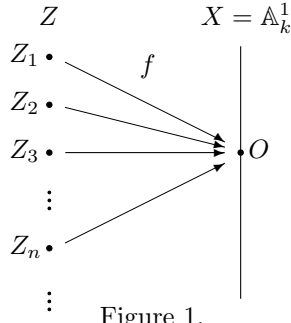


Figure 1.

このとき, f に対応する ring homomorphism は,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_X(X) = k[x] &\rightarrow \mathcal{O}_Z(Z) = \prod_{n=1}^{\infty} k[x]/(x^n). \\ F &\mapsto (F \bmod x^n)_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

ゆえに, $\ker \varphi = \bigcap_{n=1}^{\infty} (x^n) = 0$. 実際, $F \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (x^n)$ かつ $F \neq 0$ とすると, $F \in (x^{\deg F + 1})$ となり矛盾する. ここで, $k[x]$ の ideal 0 で定まる X の closed subscheme は X 自身である. よって, Proposition 4.1 より $Y := X$ が scheme-theoretic image である. 一方, $\overline{\mathrm{im} f} = \{O\} = \{O\}$ である.

Remark 4.4. 今の Example 4.3 からわかるように, $\mathrm{sp}(Y) \supsetneq \overline{\mathrm{im} f}$ となり得る原因は, "scheme の closed subset にはいくつもの reduced でない closed subscheme の構造が入り得る" というにある. 今の例は, $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上限をとると ∞ になってしまうということに類似しており, 無限個の closed subschemes $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上限をとると $\{O\}$ に収まりきらずに大きな subset へ溢れるという現象が起きている.

$\mathrm{sp}(Y) = \overline{\mathrm{im} f}$ となるためにはこのような現象を防ぐ条件が必要なのであるが, quasi-compact という条件は "有限個の上限ならば ∞ にならない" というであり, reduced という条件は "構造を制限すれば無限個の上限でも ∞ にならない" というである.

4.2 貼り合わせのための十分条件

”経由する”という性質は次のような局所性を満たす.

Lemma 4.5. $f : Z \rightarrow X$ を morphism とし, $g : Y \rightarrow X$ を closed immersion とする.

- (a) f が g を経由するとき, 任意の open subset $U \subseteq X$ に対して $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ も $g|_{g^{-1}(U)} : g^{-1}(U) \rightarrow U$ を経由する.
- (b) X の open covering $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して各 $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ が $g|_{g^{-1}(U_i)} : g^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ を経由するとき, f も g を経由する.

Proof. (a): 仮定より, morphism $h : Z \rightarrow Y$ が存在して $f = g \circ h$ が成立する. このとき, $f^{-1}(U) = h^{-1}(g^{-1}(U))$ より $h(f^{-1}(U)) \subseteq g^{-1}(U)$ で, $f|_{f^{-1}(U)} = g|_{g^{-1}(U)} \circ h|_{f^{-1}(U)}$. よって, $f|_{f^{-1}(U)}$ も $g|_{g^{-1}(U)}$ を経由する.

(b): 仮定より, 各 i に対して morphism $h_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow g^{-1}(U_i)$ が存在して $f|_{f^{-1}(U_i)} = g|_{g^{-1}(U_i)} \circ h_i$ が成立する. このとき,

$$\begin{aligned} f|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)} &= g|_{g^{-1}(U_i \cap U_j)} \circ h_i|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)}, \\ f|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)} &= g|_{g^{-1}(U_i \cap U_j)} \circ h_j|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)}. \end{aligned}$$

Lemma 2.18 より $h_i|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)} = h_j|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)}$. ゆえに, $\{h_i\}_{i \in I}$ の貼り合わせ $h : Z \rightarrow Y$ が得られる (Lemma 2.14(b)). このとき, $f|_{f^{-1}(U_i)} = g|_{g^{-1}(U_i)} \circ h_i = (g \circ h)|_{f^{-1}(U_i)} (\forall i)$. よって, $f = g \circ h$ (Lemma 2.14(a)). $\square$

さて, X が一般の scheme の場合の構成法を考える. 上の Lemma 4.5 が成立することを考えれば, X の open affine covering $\{U_i\}_{i \in I}$ をとって, Proposition 4.1 によって各 $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ の scheme-theoretic image Y_i を構成し, それらを貼り合わせるという方法が自然に考えられる. しかし, 貼り合わせるためには各 i, j に対して $U_i \cap U_j$ で Y_i と Y_j が一致していなければならない. 後にわかるように, そのためには次の形で表される ”局所性” が要求される:

Proposition 4.1 において, 任意の open subset U に対して, $Y \cap U$ が $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ の scheme-theoretic image である.

特に, basic open subset $D(a)$ ($a \in A$) に対してこの要求が満たされるための f の条件について考察する. そのために必要な記号と Lemma を準備する.

Definition 4.6. X を scheme とし, $f \in \mathcal{O}_X(X)$ に対して,

$$X_f := \{P \in X \mid f_P \notin \mathfrak{m}_{X,P}\}$$

とする. ただし, f_P は f の $\mathcal{O}_{X,P}$ への image, $\mathfrak{m}_{X,P}$ は $\mathcal{O}_{X,P}$ の maximal ideal である.

Lemma 4.7. X を scheme とし, $f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする.

- (a) 任意の open affine $U (= \text{Spec } A) \subseteq X$ に対して, $\bar{f} := f|_U \in \mathcal{O}_X(U) = A$ とするとき, $X_f \cap U = D(\bar{f})$ が成立する. 特に, X_f は X の open subset である.
- (b) $f|_{X_f}$ は $\mathcal{O}_X(X_f)$ の unit である.
- (c) X を quasi-compact または reduced とする⁴. このとき, $g \in \mathcal{O}_X(X)$ が $g|_{X_f} = 0$ in $\mathcal{O}_X(X_f)$ を満たすとする, ある $n > 0$ が存在して $f^n g = 0$ in $\mathcal{O}_X(X)$ となる.

Proof. (a): $\forall \mathfrak{p} \in U = \text{Spec } A$ に対して,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{p} \in X_f \cap U &\Leftrightarrow f_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}} \text{ in } \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \\
 &\Leftrightarrow \bar{f}_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{m}_{U,\mathfrak{p}} \text{ in } \mathcal{O}_{U,\mathfrak{p}} \\
 &\Leftrightarrow \bar{f}/1 \notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \text{ in } A_{\mathfrak{p}} \\
 &\Leftrightarrow \bar{f} \notin \mathfrak{p} \text{ in } A \\
 &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in D(\bar{f}).
 \end{aligned}$$

よって, $X_f \cap U = D(\bar{f})$.

(b): 各点 $P \in X_f$ で, $f_P \notin \mathfrak{m}_{X,P}$ ゆえ f_P は $\mathcal{O}_{X,P}$ の unit. よって, $f|_{X_f}$ も unit.

(c): X の open affine covering $\{U_i (= \text{Spec } A_i)\}_{i \in I}$ をとる. 各 i に対して, $f_i := f|_{U_i}, g_i := g|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i) = A_i$ とおく. このとき, $g_i|_{X_f \cap U_i} = (g|_{X_f})|_{X_f \cap U_i} = 0$ in $\mathcal{O}_X(X_f \cap U_i)$. すなわち, $g_i/1 = 0$ in $(A_i)_{f_i}$. ゆえに, ある $n_i > 0$ が存在して $f_i^{n_i} g_i = 0$ in $A_i = \mathcal{O}_X(U_i)$ となる.

まず, X が quasi-compact とすると, $\#I < \infty$ としてよい. そこで, $n := \max_{i \in I} \{n_i\} (> 0)$ とおけば, $(f^n g)|_{U_i} = f_i^n g_i = 0$ in $\mathcal{O}_X(U_i)$ ($\forall i$) より, $f^n g = 0$ in $\mathcal{O}_X(X)$ となる.

次に, X が reduced とすると, $(f_i g_i)^{n_i} = (f_i^{n_i} g_i) g_i^{n_i-1} = 0$ より $(f g)|_{U_i} = f_i g_i$ は $\mathcal{O}_X(U_i)$ の nilpotent であり 0 ($\forall i$). よって, $f g = 0$ in $\mathcal{O}_X(X)$. $\square$

これを使うと次が証明される.

Proposition 4.8. Proposition 4.1 において, さらに Z が quasi-compact または reduced とする. このとき, 任意の $a \in A$ をとると, closed immersion $g|_{g^{-1}(D(a))} : g^{-1}(D(a)) \rightarrow D(a)$ が $f|_{f^{-1}(D(a))} : f^{-1}(D(a)) \rightarrow D(a)$ の scheme-theoretic image を与える.

Proof. 記号は Proposition 4.1 の証明と同じものを使用する.

⁴[H] II Exercise 2.16(b) には " X が quasi-compact" という仮定のみで記載されている.

まず, $g^{-1}(D(a)) = D(\psi(a)) \cong \operatorname{Spec}(A/\ker \varphi)_{\psi(a)} \cong \operatorname{Spec} A_a/(\ker \varphi)A_a$
ゆえ $g|_{g^{-1}(D(a))}$ は A_a の ideal $(\ker \varphi)A_a$ に対応する $D(a) = \operatorname{Spec} A_a$ の
closed subscheme を与える.

一方, $f^{-1}(D(a)) = Z_{\varphi(a)}$ である. 実際, Z の open affine covering $\{W_k\}_{k \in K}$
をとり, $\rho_k : \mathcal{O}_Z(Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z(W_k)$ を restriction map とすると, $f|_{W_k} : W_k \rightarrow X$
に対応する ring homomorphism は $\rho_k \circ \varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(W_k)$ である. ゆえに,
 $f^{-1}(D(a)) \cap W_k = (f|_{W_k})^{-1}(D(a)) = D((\rho_k \circ \varphi)(a)) = Z_{\varphi(a)} \cap W_k$ (Lemma
4.7(a)). 両辺" $\bigcup_{k \in K}$ "をとれば $f^{-1}(D(a)) = Z_{\varphi(a)}$.

次に, schemes の可換図式

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z_{\varphi(a)} & \xrightarrow{f|_{Z_{\varphi(a)}}} & D(a) \end{array}$$

において global sections をとった rings の可換図式を

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Z(Z) & \xleftarrow{\varphi} & A \\ \downarrow \rho & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{O}_Z(Z_{\varphi(a)}) & \xleftarrow{\varphi_a} & A_a \end{array}$$

とする. このとき, ρ は restriction map, α は $b \mapsto b/1$ である. ゆえに,
 $\forall b \in A, \forall m \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_a(b/1) &= (\varphi_a \circ \alpha)(b) = (\rho \circ \varphi)(b) = \varphi(b)|_{Z_{\varphi(a)}}, \\ \varphi_a(b/a^m) &= \varphi_a(b/1)\varphi_a(a/1)^{-m} = (\varphi(b)|_{Z_{\varphi(a)}})(\varphi(a)|_{Z_{\varphi(a)}})^{-m}. \end{aligned}$$

さて, $\forall b/a^m \in A_a$ に対して,

$$\begin{aligned} b/a^m \in \ker \varphi_a &\Leftrightarrow (\varphi(b)|_{Z_{\varphi(a)}})(\varphi(a)|_{Z_{\varphi(a)}})^{-m} = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(b)|_{Z_{\varphi(a)}} = 0 \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \exists l \geq 0 \text{ s.t. } \varphi(a)^l \varphi(b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists l \geq 0 \text{ s.t. } a^l b \in \ker \varphi \\ &\Leftrightarrow b/a^m \in (\ker \varphi)A_a. \end{aligned}$$

(*) について:

($\Rightarrow$): Z が quasi-compact または reduced だから Lemma 4.7(c) より.

($\Leftarrow$): " $|_{Z_{\varphi(a)}}$ "をとれば $(\varphi(a)|_{Z_{\varphi(a)}})^l (\varphi(b)|_{Z_{\varphi(a)}}) = 0$. $\varphi(a)|_{Z_{\varphi(a)}}$ は $\mathcal{O}_Z(Z_{\varphi(a)})$
の unit (Lemma 4.7(b)) ゆえ, $\varphi(b)|_{Z_{\varphi(a)}} = 0$.

ここで, φ_a は $f|_{f^{-1}(D(a))}$ に対応する ring homomorphism であったことに
注意する. $g|_{g^{-1}(D(a))} : g^{-1}(D(a)) \rightarrow D(a)$ は A_a の ideal $(\ker \varphi)A_a = \ker \varphi_a$
に対応する $D(a)$ の closed subscheme を与えるので, Proposition 4.1 より
 $f|_{f^{-1}(D(a))}$ の scheme-theoretic image を与える. $\square$

$D(a)$ の形の open subset についてのみ示すことができれば, 任意の open subset の場合に一般化される.

Proposition 4.9. Proposition 4.1 において, さらに Z が quasi-compact または reduced だとする. このとき, 任意の open subset U をとると, closed immersion $g|_{g^{-1}(U)} : g^{-1}(U) \rightarrow U$ が $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ の scheme-theoretic image を与える.

Proof. (1): f は g を経由するので, Lemma 4.5(a) より $f|_{f^{-1}(U)}$ は $g|_{g^{-1}(U)}$ を経由する.

(2): Lemma 2.4(d) より $U = \bigcup_{i \in I} D(a_i)$ ($a_i \in A$) と表せる. Proposition 4.8 より, 各 i に対して $g|_{g^{-1}(D(a_i))} : g^{-1}(D(a_i)) \rightarrow D(a_i)$ は $f|_{f^{-1}(D(a_i))} : f^{-1}(D(a_i)) \rightarrow D(a_i)$ の scheme-theoretic image を与える.

さて, $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ が closed immersion $g' : Y' \rightarrow U$ を経由したとする. このとき, Lemma 4.5(a) より各 $f|_{f^{-1}(D(a_i))}$ も $g'|_{g'^{-1}(D(a_i))}$ を経由する. ゆえに, $g|_{g^{-1}(D(a_i))}$ の性質 (2) より $g|_{g^{-1}(D(a_i))}$ は $g'|_{g'^{-1}(D(a_i))}$ を経由する. よって, Lemma 4.5(b) より $g|_{g^{-1}(U)}$ も g' を経由する. $\square$

4.3 貼り合わせによる構成

今までの議論から貼り合わせるための十分条件が得られた. そこで, X が一般の scheme の場合について考察する.

Theorem 4.10. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism とする. f が quasi-compact または Z が reduced ならば f の scheme-theoretic image を貼り合わせにより構成できる.

Proof. $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の open affine subsets 全体とする⁵. Proposition 4.1 より各 $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ の scheme-theoretic image Y_i が存在する. $g_i : Y_i \rightarrow U_i$ を closed immersion とし, $Y_{ij} := g_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ とおく.

f が quasi-compact のとき各 $f^{-1}(U_i)$ は quasi-compact (Lemma 2.23). Z が reduced のとき各 $f^{-1}(U_i)$ は reduced. そこで, Proposition 4.9 を open subset $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ および $U_i \cap U_j \subseteq U_j$ について適用すると, 2 つの closed immersions $g_i|_{Y_{ij}} : Y_{ij} \rightarrow U_i \cap U_j$ および $g_j|_{Y_{ji}} : Y_{ji} \rightarrow U_i \cap U_j$ が $f|_{f^{-1}(U_i \cap U_j)} : f^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow U_i \cap U_j$ の scheme-theoretic image を与える. よって, scheme-theoretic image の一意性 (Proposition 3.3) より $\exists$ isomorphism $\varphi_{ij} : Y_{ij} \rightarrow Y_{ji}$ s.t. $g_i|_{Y_{ij}} = g_j|_{Y_{ji}} \circ \varphi_{ij}$.

$\{Y_i\}_i$ を $\{\varphi_{ij}\}_{ij}$ に沿って貼り合わせる (Lemma 2.13) ために次を示す.

(i) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1} \quad (\forall i, j)$.

⁵Theorem の証明のみならば $\{U_i\}_{i \in I}$ は open affine subsets 全体でなくても open affine covering であれば十分である. しかし, 後に structure sheaf を考察する際 (Theorem 4.16), 任意の open affine subset についてある性質が成り立つことを使いたいのであえてそうした.

$$(ii) \quad \varphi_{ij}(Y_{ij} \cap Y_{ik}) = Y_{ji} \cap Y_{jk} \quad (\forall i, j, k).$$

$$(iii) \quad \varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} \text{ on } Y_{ij} \cap Y_{ik} \quad (\forall i, j, k).$$

$$(i): \quad \begin{aligned} g_j|_{Y_{ji}} \circ \varphi_{ij} &= g_i|_{Y_{ij}} \\ &= g_i|_{Y_{ij}} \circ \varphi_{ji} \circ \varphi_{ji}^{-1} \\ &= g_j|_{Y_{ji}} \circ \varphi_{ji}^{-1}. \end{aligned}$$

Lemma 2.18 より $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$.

$$(ii): \quad \begin{aligned} \varphi_{ij}(Y_{ij} \cap Y_{ik}) &= \varphi_{ij}(g_i^{-1}(U_i \cap U_j) \cap g_i^{-1}(U_i \cap U_k)) \\ &= \varphi_{ji}^{-1}(g_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k)) \\ &= g_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) \\ &= g_j^{-1}(U_j \cap U_i) \cap g_j^{-1}(U_j \cap U_k) \\ &= Y_{ji} \cap Y_{jk}. \end{aligned}$$

$$(iii): \quad \begin{aligned} g_k|_{Y_{ki} \cap Y_{kj}} \circ \varphi_{ik}|_{Y_{ij} \cap Y_{ik}} &= g_i|_{Y_{ij} \cap Y_{ik}} \\ &= g_j|_{Y_{ji} \cap Y_{jk}} \circ \varphi_{ij}|_{Y_{ij} \cap Y_{ik}} \\ &= g_k|_{Y_{ki} \cap Y_{kj}} \circ \varphi_{jk}|_{Y_{ji} \cap Y_{jk}} \circ \varphi_{ij}|_{Y_{ij} \cap Y_{ik}}. \end{aligned}$$

Lemma 2.18 より $\varphi_{ik}|_{Y_{ij} \cap Y_{ik}} = \varphi_{jk}|_{Y_{ji} \cap Y_{jk}} \circ \varphi_{ij}|_{Y_{ij} \cap Y_{ik}}$.

したがって, $\{Y_i\}_i$ を $\{\varphi_{ij}\}_{ij}$ に沿って貼り合わせた scheme Y が得られる (Lemma 2.13). また, $g_i|_{Y_{ij}} = g_j|_{Y_{ji}} \circ \varphi_{ij}$ より $\{g_i\}_{i \in I}$ を貼り合わせた schemes の morphism $g : Y \rightarrow X$ が得られる (Lemma 2.14(b)). ここで, 各 $g|_{g^{-1}(U_i)} (= g_i) : g^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ が closed immersion だから $g : Y \rightarrow X$ も closed immersion である (Lemma 2.16(b)). 最後に, g が f に対して (1),(2) を満たすことを示す.

(1): 各 $f|_{f^{-1}(U_i)}$ は $g|_{g^{-1}(U_i)}$ を経由するので, Lemma 4.5(b) より f は g を経由する.

(2): $f : Z \rightarrow X$ が closed immersion $g' : Y' \rightarrow X$ を経由したとする. このとき, Lemma 4.5(a) より各 $f|_{f^{-1}(U_i)}$ も $g'|_{g'^{-1}(U_i)}$ を経由する. ゆえに, $g|_{g^{-1}(U_i)}$ の性質 (2) より $g|_{g^{-1}(U_i)}$ は $g'|_{g'^{-1}(U_i)}$ を経由する. よって, Lemma 4.5(b) より g も g' を経由する.

以上より, Y は f の scheme-theoretic image である. $\square$

次に, underlying topological space $\text{sp}(Y)$ について考察すると, Proposition 4.2 の結果を一般化できる.

Theorem 4.11. $f : Z \rightarrow X$ を morphism とし, f が quasi-compact または Z が reduced とする. このとき, Theorem 4.10 で得られる scheme-theoretic image Y について,

$$\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$$

が成立する.

Proof. 記号は Theorem 4.10 の証明と同じものを使用する.

Proposition 4.2 より, $Y_i = \overline{\text{im}(f|_{f^{-1}(U_i)})}^{U_i}$ ($\forall i$) である. ただし, " $\overline{}^{U_i}$ " は U_i での closure を表す. Y は $Y_i (\subseteq U_i)$ を貼り合わせたものだから,

$$\begin{aligned} Y &= \bigcup_{i \in I} Y_i \\ &= \bigcup_{i \in I} \overline{\text{im}(f|_{f^{-1}(U_i)})}^{U_i} \\ &= \bigcup_{i \in I} \overline{\text{im} f \cap U_i}^{U_i} \\ &\subseteq \overline{\text{im} f}. \end{aligned}$$

逆の包含関係は f が Y を経由することから, Proposition 4.2(a) の証明と同様である. $\square$

f が quasi-compact でなく Z が reduced でもない場合, Theorem 4.10 における scheme-theoretic image の構成法が適用できない例がある.

Example 4.12. k を field とし, $X := \mathbb{P}_k^1 = \text{Proj } k[x, y]$ とする. また, $Z_n := \text{Proj } k[x, y]/(x^n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. これらは $\mathbb{P}_k^1$ の点 $O := (0 : 1)$ にさまざまな構造を入れた closed subschemes であり, $n \geq 2$ で reduced でない. これらの disjoint union をとって, $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$ とする. $f_n : Z_n \rightarrow X$ ($n = 1, 2, \dots$) を closed immersion とし, $f := \coprod_{n=1}^{\infty} f_n : Z \rightarrow X$ とする (Figure 2 参照). ここで, $\text{Proj } k[x, y]/(x^n) \cong \text{Spec } k[x]/(x^n)$ に注意する.

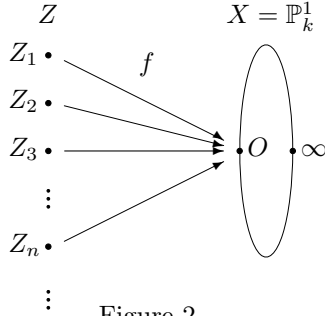


Figure 2.

$X = \mathbb{P}_k^1$ は 2 つの open affine subsets

$$\begin{aligned} U_O &:= X - \{\infty\} = D_+(y) (\cong \mathbb{A}_k^1) \\ U_\infty &:= X - \{O\} = D_+(x) (\cong \mathbb{A}_k^1) \end{aligned}$$

で cover される (ただし, $\infty := (1 : 0)$).

$f|_{f^{-1}(U_O)} : f^{-1}(U_O) = Z \rightarrow U_O = \mathbb{A}_k^1$ は Example 4.2 で扱った morphism と同じである (ゆえに, f は quasi-compact ではない). よって, $f|_{f^{-1}(U_O)}$ の scheme-theoretic image Y_O は U_O である.

$f|_{f^{-1}(U_\infty)} : f^{-1}(U_\infty) = \emptyset \rightarrow U_\infty = \mathbb{A}_k^1$ について, 対応する homomorphism は,

$$\varphi_\infty : \mathcal{O}_X(U_\infty) = k[x] \rightarrow \mathcal{O}_Z(\emptyset) = 0.$$

ゆえに, $\ker \varphi_\infty = k[x]$. ここで, ideal $k[x]$ で定まる $U_\infty = \mathbb{A}_k^1$ の closed subscheme は $\emptyset$ である.

このとき,

$$\begin{aligned} Y_{O\infty} &:= g_O^{-1}(U_O \cap U_\infty) = U_O \cap U_\infty & \text{in } Y_O = U_O. \\ Y_{\infty O} &:= g_\infty^{-1}(U_O \cap U_\infty) = \emptyset & \text{in } Y_\infty = \emptyset. \end{aligned}$$

よって, $Y_{O\infty} \not\cong Y_{\infty O}$ より貼り合わせできない.

Remark 4.13. 上の Example 4.12 は Theorem 4.10 の構成法で scheme-theoretic image を得られない例である. しかし, scheme-theoretic image が存在しない例というわけではない. 実は, この例では X 自身が scheme-theoretic image となる. そのことは後に Example 5.19 で示す.

4.4 Structure sheaf についての考察

次に, Theorem 4.10 で得られる scheme-theoretic image Y の structure sheaf $\mathcal{O}_Y$ について考察する. そのために ideal sheaf を用いる.

Definition 4.14. X を scheme, Y を X の closed subscheme とし, $g : Y \rightarrow X$ を closed immersion とする. このとき, X 上の ideal sheaf $\ker g^\#$ を Y の *ideal sheaf* といい, $\mathcal{I}_Y$ と書く.

Lemma 4.15. X を scheme, Y を X の closed subscheme とするとき,

- (a) 任意の open affine $U (= \text{Spec } A) \subseteq X$ に対して, U の closed subscheme $Y \cap U$ に対応する A の ideal は $\mathcal{I}_Y(U)$ である.
- (b) $\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y)|_Y$ が成立する.

Proof. [H] II Proposition 5.9. □

Theorem 4.16. $f : Z \rightarrow X$ を morphism とし, f が quasi-compact または Z が reduced とする. このとき, Theorem 4.10 で得られる scheme-theoretic image Y について,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_Y &= \ker f^\# \\ \mathcal{O}_Y &= (\text{im } f^\#)|_Y \end{aligned}$$

が成立する. 特に Z が reduced のとき, Y は reduced である.

Proof. 記号は Theorem 4.10 の証明と同じものを使用する.

$\{U_i (= \text{Spec } A_i)\}_{i \in I}$ が X の open affine subsets 全体であったことに注意する. ここで, $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ に対応する ring homomorphism は $f^\#(U_i) : A_i \rightarrow \mathcal{O}_Z(f^{-1}(U_i))$ である. Theorem 4.10 の証明より, Y は A_i の ideal $\ker(f^\#(U_i))$ に対応する U_i の closed subscheme $Y_i = Y \cap U_i$ を貼り合わせたものであった. ゆえに, Lemma 4.15(a) より,

$$\mathcal{I}_Y(U_i) = \ker(f^\#(U_i)) = (\ker f^\#)(U_i) \text{ in } A_i = \mathcal{O}_X(U_i).$$

さて, 任意の open subset $U \subseteq X$ をとると, $\{U_i\}_{i \in J}$ が U の open affine covering となるように $J \subseteq I$ をとることができる. このとき, $\mathcal{I}_Y$ および $\ker f^\#$ が sheaf であることに注意すれば, $\forall s \in \mathcal{O}_X(U)$ に対して,

$$\begin{aligned} s \in \mathcal{I}_Y(U) &\Leftrightarrow s|_{U_i} \in \mathcal{I}_Y(U_i) \quad (\forall i \in J) \\ &\Leftrightarrow s|_{U_i} \in (\ker f^\#)(U_i) \quad (\forall i \in J) \\ &\Leftrightarrow s \in (\ker f^\#)(U). \end{aligned}$$

よって, $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$ in $\mathcal{O}_X$.

次に, Lemma 4.15(b) より,

$$\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y)|_Y = (\mathcal{O}_X / \ker f^\#)|_Y = (\text{im } f^\#)|_Y.$$

最後に, Z が reduced のとき, $\sqrt{0} = 0$ in $\mathcal{O}_Z(f^{-1}(U_i))$ に注意すると,

$$\sqrt{\mathcal{I}_Y(U_i)} = \sqrt{f^\#(U_i)^{-1}(0)} = f^\#(U_i)^{-1}(\sqrt{0}) = f^\#(U_i)^{-1}(0) = \mathcal{I}_Y(U_i).$$

よって, 各 $Y_i = \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U_i) / \mathcal{I}_Y(U_i))$ は reduced だから Y も reduced. $\square$

f が quasi-compact でなく Z が reduced でなくとも, X が affine ならば Proposition 4.1 より scheme-theoretic image を構成することができる. しかし, この場合 $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$ が成立しない例がある.

Example 4.17. f を Example 4.2 と同じものとする. scheme-theoretic image Y は X 自身であった. ゆえに, $\mathcal{I}_Y = 0$. 一方, $U := D(x) = X - \{O\}$ とおくと,

$$f^\#(U) : \mathcal{O}_X(U) = k[x]_x \rightarrow \mathcal{O}_Z(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Z(\emptyset) = 0.$$

ゆえに, $(\ker f^\#)(U) = \ker(f^\#(U)) = k[x]_x \neq 0$. よって, $\ker f^\# \neq 0$.

5 大域的構成

前節では、局所的なものを貼り合わせるという方法で scheme-theoretic image を構成した。しかし、そのためには f に条件が必要であった。本節では、大域的に考察することで任意の f について scheme-theoretic image を構成する。

幾何学的なアイディアは、 f が経由するような X の全ての closed subschemes を考えて、それらの "intersection (に相当するもの)" をとるということである。そのための道具として "quasi-coherent" という概念を用いる。

5.1 Quasi-coherent

Definition 5.1. A を ring, $X := \text{Spec } A$, M を A -module とするとき, X 上の M に付随する $\mathcal{O}_X$ -module $\tilde{M}$ を次で定義する: 各 open subset $U \subseteq X$ に対して,

$$\tilde{M}(U) = \{s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \mid (i), (ii) \text{ を満たす} \}.$$

ただし,

- (i) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$.
- (ii) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $\mathfrak{p}$ の open neighborhood V および $m \in M, f \in A$ が存在して各点 $\mathfrak{q} \in V$ で $f \notin \mathfrak{q}$ かつ $s(\mathfrak{q}) = m/f$ in $M_{\mathfrak{q}}$.

Lemma 5.2. A を ring, $X := \text{Spec } A$, M を A -module とするとき,

- (a) $\mathfrak{p} \in X$ に対して $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$.
- (b) $f \in A$ に対して $\tilde{M}(D(f)) \cong M_f$.
- (c) $\tilde{M}(X) \cong M$.

Proof. [H] II Proposition 5.1. □

Definition 5.3. X を scheme とする. $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ が *quasi-coherent* であるとは, X が open affine covering $\{U_i (= \text{Spec } A_i)\}_{i \in I}$ を持ち, 各 i に対してある A_i -module M_i によって $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ と表せるときをいう。

Lemma 5.4. X を scheme とする.

- (a) $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ を quasi-coherent $\mathcal{O}_X$ -modules とすると, $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ も quasi-coherent.
- (b) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を quasi-coherent $\mathcal{O}_X$ -modules とすると, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ も quasi-coherent.

Proof. [H] II Proposition 5.2. □

Lemma 5.5. X を scheme とし, $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$ -modules の morphism とする. このとき, $\mathcal{F}$ および $\mathcal{G}$ が quasi-coherent ならば $\ker F$ および $\operatorname{im} F$ も quasi-coherent である.

Proof. [H] II Proposition 5.7. □

Lemma 5.6. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism とし, 次の条件 (*) を満たすとする:

X の open affine covering $\{U_i\}_{i \in I}$ と各 i に対して $f^{-1}(U_i)$ の finite open affine covering $\{W_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$ が存在して, 各 i, j, k に対して $W_{ij} \cap W_{ik}$ が quasi-compact となる.

このとき, $\mathcal{F}$ が quasi-coherent $\mathcal{O}_Z$ -module とすると, $f_*\mathcal{F}$ は quasi-coherent $\mathcal{O}_X$ -module である.

Proof. [H] II Proposition 5.8 ⁶. □

Lemma 5.7. X を scheme とするとき, X の closed subschemes 全体と X 上の quasi-coherent ideal sheaves 全体には $Y \mapsto \mathcal{I}_Y$ なる 1 対 1 対応がある. 逆の対応は, $\mathcal{I} \mapsto Y, \operatorname{sp}(Y) := \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), \mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_Y$ で与えられる.

Proof. [H] II Proposition 5.9. □

5.2 大域的構成

さて, scheme-theoretic image の定義を ideal sheaf で言い換えると次のようになる.

Proposition 5.8. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism とし, $g : Y \rightarrow X$, $g' : Y' \rightarrow X$ を closed immersions とするとき,

(a) f が g を経由する $\Leftrightarrow \mathcal{I}_Y \subseteq \ker f^\#$ in $\mathcal{O}_X$.

(b) g が g' を経由する $\Leftrightarrow \mathcal{I}_{Y'} \subseteq \mathcal{I}_Y$ in $\mathcal{O}_X$.

Proof. (1): $(\Rightarrow)$: 仮定より $\exists h : Z \rightarrow Y$ s.t. $f = g \circ h$. このとき, $f^\# = g_*h^\# \circ g^\#$. よって, $\mathcal{I}_Y = \ker g^\# \subseteq \ker f^\#$.

$(\Leftarrow)$: まず, $f(Z) \subseteq \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y) = Y$ が成立する. 実際, $\forall z \in Z$ をとり, $x := f(z) (\in X)$ とおくと, $\mathcal{I}_{Y,x} \subseteq (\ker f^\#)_x = \ker (f_x^\#)$ in $\mathcal{O}_{X,x}$. ここで, ring homomorphism $f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_Z)_x$ において, $x \in f(Z)$ ゆえ

⁶[H] II Proposition 5.8 における仮定は, " X が noetherian または f が quasi-compact & separated" となっているが, その証明に必要な仮定は (*) まで緩めることができる.

$(f_*\mathcal{O}_Z)_x \neq 0$ だから $\ker(f_x^\#) \subsetneq \mathcal{O}_{X,x}$. よって, $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{Y,x} \neq 0$. すなわち, $x \in \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)$.

ゆえに, (set-theoretic) map $h : \text{sp}(Z) \rightarrow \text{sp}(Y)$ が存在して $f = g \circ h$ (set-theoretic maps として) を満たす. f は continuous で g は inclusion map だから, h も continuous.

次に, $\mathcal{I}_Y \subseteq \ker f^\#$ より, $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$ は $\overline{f^\#} : \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$ を誘導する. すなわち, $g^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$ によって, $f^\# = \overline{f^\#} \circ g^\#$ と表せる. そこで, $h^\# := g^{-1}\overline{f^\#} : g^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y) = \mathcal{O}_Y \rightarrow g^{-1}f_*\mathcal{O}_Z = g^{-1}g_*h_*\mathcal{O}_Z = h_*\mathcal{O}_Z$ とする. このとき, $\forall z \in Z$ に対して, $f_z^\# : \mathcal{O}_{X,f(z)} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ は local homomorphism だから, 誘導される $\overline{f_z^\#} = h_z^\# : \mathcal{O}_{X,f(z)}/\mathcal{I}_{Y,f(z)} = (\mathcal{O}/\mathcal{I}_Y)_{f(z)} = \mathcal{O}_{Y,h(z)} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ も local homomorphism. よって, $(h, h^\#) : Z \rightarrow Y$ は schemes の morphism.

ここで, $g_*h^\# : g_*\mathcal{O}_Y \rightarrow g_*h_*\mathcal{O}_Z$ は $\overline{f^\#} : \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$ と同じ morphism であり, $g_*h^\# \circ g^\# = \overline{f^\#} \circ g^\# = f^\#$. したがって, $f = g \circ h$ (schemes の morphism として) である.

(b): (a) において f を g に, g を g' にそれぞれ置き換えればよい. $\square$

Corollary 5.9. schemes の morphism $f : Z \rightarrow X$ に対して, $\ker f^\#$ に含まれる X 上の quasi-coherent ideal sheaves の全体を $\mathfrak{I}_f$ とする. このとき, X の closed subscheme Y に対して,

$$Y \text{ が } f \text{ の scheme-theoretic image} \Leftrightarrow \mathcal{I}_Y \text{ が } \mathfrak{I}_f \text{ の最大元}$$

が成立する.

Proof. Lemma 5.7 および Proposition 5.8 より. $\square$

Corollary 5.10. 特に $\ker f^\#$ が quasi-coherent ならば, $\ker f^\#$ が $\mathfrak{I}_f$ の最大元であるから, それに対応する X の closed subscheme が f の scheme-theoretic image である.

Remark 5.11. Corollary 5.10 は, $\ker f^\#$ が quasi-coherent となる f の (十分) 条件を考える動機を与える. すぐに思いつくのは次の条件 (*) である:

X の open affine covering $\{U_i\}_{i \in I}$ と各 i に対して $f^{-1}(U_i)$ の finite open affine covering $\{W_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$ が存在して, 各 i, j, k に対して $W_{ij} \cap W_{ik}$ が quasi-compact になる.

実際, f が (*) を満たすとき, $\mathcal{O}_Z$ は Z 上 quasi-coherent だから $f_*\mathcal{O}_Z$ は X 上 quasi-coherent (Lemma 5.6). 一方 $\mathcal{O}_X$ は X 上 quasi-coherent だから, $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$ に Lemma 5.5 を適用すれば $\ker f^\#$ も quasi-coherent.

したがって, Corollary 5.10 より f が (*) を満たすとき $\ker f^\#$ に対応する X の closed subscheme Y が f の scheme-theoretic image である.

これは、少し強い仮定の下での Theorem 4.10 および Theorem 4.16 の別証明である。

Remark 5.12. Remark 5.11 と逆に考えれば、Theorem 4.10 および Theorem 4.16 から、 f の条件として (*) まで仮定しなくても " f が quasi-compact または Z が reduced" を仮定すれば、 $(f_* \mathcal{O}_Z)$ が quasi-coherent であるとは限らないが $\ker f^\#$ が quasi-coherent であることが従う。

Example 5.13. Example 4.3 (および 4.17) と同じ f を考える。 $Y := X$ が f の scheme-theoretic image だったから、Corollary 5.9 より $\mathcal{I}_Y = 0$ が $\mathfrak{I}_f$ の最大元。一方 $0 \subsetneq \ker f^\#$ であった。この例は $\mathfrak{I}_f$ の最大元が存在したとしてもそれが $\ker f^\#$ でない例であり、Corollary 5.10 の逆が成立しない例である。

さて、任意の f について scheme-theoretic image を構成したい。 X の closed subschemes の category を包含する大きな category として、 X 上の ideal sheaves 全体を考えることができる。 intersection をとる操作に相当するものは sum をとる操作であるから、その操作が closed subschemes の category の中で閉じていること、および " f が経由する" という性質を保存すること、を示せばよい。

Theorem 5.14. 任意の morphism $f : Z \rightarrow X$ に対して、 f の scheme-theoretic image が存在する。

Proof. $\{\mathcal{I}_i\}_{i \in I} := \mathfrak{I}_f$ とする。少なくとも $0 \in \mathfrak{I}_f$ だから $I \neq \emptyset$ である。そこで、 $\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i$ について考える。これは、各 open subset $U \subseteq X$ に対して $\mathcal{O}_X(U)$ の ideal $\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i(U)$ を対応させる X 上の ideal presheaf $\text{pre-}\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i$ を sheaf 化した X 上の ideal sheaf である。

このとき、 $\mathcal{I}_i \subseteq \text{pre-}\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i \subseteq \ker f^\#$ in $\mathcal{O}_X$ であるから、sheaf 化すれば $\mathcal{I}_i \subseteq \sum_{i \in I} \mathcal{I}_i \subseteq \ker f^\#$ in $\mathcal{O}_X$ 。

また、 $F : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{I}_i \rightarrow \mathcal{O}_X$ を埋め込み $\mathcal{I}_i \rightarrow \mathcal{O}_X$ から定まる morphism とすれば、 $\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i = \text{im } F$ である。各 $\mathcal{I}_i$ は quasi-coherent だから、 $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{I}_i$ も quasi-coherent (Lemma 5.4(a))。 $\mathcal{O}_X$ も quasi-coherent だから $\text{im } F$ も quasi-coherent (Lemma 5.5) である。

以上より、 $\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i$ は $\mathfrak{I}_f$ の最大元。よって、Corollary 5.9 より $\sum_{i \in I} \mathcal{I}_i$ に対応する X の closed subscheme が f の scheme-theoretic image である。 $\square$

5.3 Example

Example 4.12 は、Theorem 4.10 の証明法では scheme-theoretic image を構成することができなかった。しかし、Theorem 5.14 から存在が保証された。そこで本節の最後の議論として、この例について scheme-theoretic image を求める。

まずは議論で必要になる事項を挙げておく。

Definition 5.15. S を graded ring, $X := \text{Proj } S$, M を graded S -module とするとき, X 上の M に付随する $\mathcal{O}_X$ -module $\widetilde{M}$ を次で定義する: 各 open subset $U \subseteq X$ に対して,

$$\widetilde{M}(U) = \{s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})} \mid (i), (ii) \text{ を満たす} \}.$$

ただし,

- (i) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$.
- (ii) $\forall \mathfrak{p} \in U$ に対して $\mathfrak{p}$ の open neighborhood V および $d \in \mathbb{Z}, m \in M_d, f \in S_d$ が存在して各点 $\mathfrak{q} \in V$ で $f \notin \mathfrak{q}$ かつ $s(\mathfrak{q}) = m/f$ in $M_{(\mathfrak{q})}$.

Definition 5.16. S を graded ring, $X := \text{Proj } S$ とする. $d \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathcal{O}_X(d)$ を $S(d)$ で定義する. ただし, $S(d)$ とは S を d だけねじった graded S -module である. $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}(d)$ を $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(d)$ で定義し, $\mathcal{F}$ に付随する graded S -module $\Gamma_*(\mathcal{F})$ を $\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$ で定義する.

Lemma 5.17. A を ring, $r \geq 0$, $X := \text{Proj } A[x_0, \dots, x_r]$ とすると,

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong A[x_0, \dots, x_r].$$

Proof. [H] II Proposition 5.13. □

Lemma 5.18. S を graded ring で $S = S_0[f_0, \dots, f_r]$ ($f_i \in S_1$) なるものとし, $X := \text{Proj } S$ とする. このとき,

- (a) 任意の quasi-coherent $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ に対して, $(\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim \cong \mathcal{F}$.
- (b) 2つの graded S -modules M, M' が, ある $d_0 \in \mathbb{Z}$ で $M_d \cong M'_d$ ($\forall d \geq d_0$) となるとき, $\widetilde{M} \cong \widetilde{M'}$.
- (c) 任意の finite graded S -module M に対して, ある $d_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して $\Gamma(X, \widetilde{M}(d)) \cong M_d$ ($\forall d \geq d_0$) となる.

Proof. [H] II Proposition 5.15, II Exercise 5.9. または, [G-D.2] Proposition 2.6.5, Proposition 2.7.3, Théorème 2.7.5. □

Example 5.19. Example 4.12 と同じ f を考える.

実は, この例では $\mathfrak{I}_f = \{0\}$ となる. これより, 0 が $\mathfrak{I}_f$ の最大元であり, Corollary 5.9 より 0 に対応する X の closed subscheme X が f の scheme-theoretic image である.

Proof of " $\mathfrak{I}_f = \{0\}$ ". $\mathcal{J} \in \mathfrak{I}_f$ とする. functor " Γ_* " は left exact だから, $\mathcal{J} \subseteq \ker f^\# \subseteq \mathcal{O}_X$ より $\Gamma_*(\mathcal{J}) \subseteq \Gamma_*(\ker f^\#) \subseteq \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ とみなせる.

functor " $\otimes \mathcal{O}_X(d)$ " は exact であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\Gamma_*(\ker f^\#) &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, (\ker f^\#)(d)) \\ &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \ker(f^\#(d))) \\ &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \ker(\Gamma(X, f^\#(d))).\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}f^\#(d) : \mathcal{O}_X(d) &\rightarrow (f_* \mathcal{O}_Z)(d) = \prod_{n=1}^{\infty} f_{n*} \mathcal{O}_{Z_n}(d), \\ \Gamma(X, f^\#(d)) : \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) &\rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(Z_n, \mathcal{O}_{Z_n}(d)).\end{aligned}$$

Lemma 5.17 より $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) \cong k[x, y]_d$. また, Lemma 5.18(c) よりある $d_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して $\Gamma(Z_n, \mathcal{O}_{Z_n}(d)) \cong (k[x, y]/(x^n))_d$ ($\forall d \geq d_0$). このとき, $d \geq d_0$ に対して,

$$\begin{aligned}\Gamma(X, f^\#(d)) : k[x, y]_d &\rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (k[x, y]/(x^n))_d, \\ F &\mapsto (F \bmod x^n)_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

ゆえに, $\ker(\Gamma(X, f^\#(d))) = k[x, y]_d \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (x^n) = k[x, y]_d \cap 0 = 0$. よって, Lemma 5.18(b) より,

$$\left(\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \ker(\Gamma(X, f^\#(d)))\right)^\sim = 0.$$

さて, functor " $\sim$ " は exact であることに注意する. $\mathcal{I}$ は quasi-coherent だから Lemma 5.18(a) より $\mathcal{O}_X$ の中で,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= (\Gamma_*(\mathcal{I}))^\sim \\ &\subseteq (\Gamma_*(\ker f^\#))^\sim \\ &= \left(\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \ker(\Gamma(X, f^\#(d)))\right)^\sim \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって, $\mathcal{I} = 0$. 以上より, $\mathfrak{I}_f = \{0\}$. □

6 Non-reduced-degree を用いた一般化

Theorem 4.11 で, f が quasi-compact または Z が reduced という仮定の下で $\mathrm{sp}(Y) = \overline{\mathrm{im} f}$ であることがわかった. 本節では, これが成立するための条件をさらに緩めることについて議論する.

6.1 Non-reduced-degree の導入

Example 4.3 および Remark 4.4 について思い出すと, reduced という条件は "構造を制限すれば無限個の上限でも ∞ にならない" ということであった. しかし, reduced という強い条件で制限する必要はない. 実際, quasi-compact でなく reduced でもないが $\mathrm{sp}(Y) = \overline{\mathrm{im} f}$ が成立する例として, 次のような明らかなものがある.

Example 6.1. k を field とし, $X := \mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$, $Z_n := \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$, $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} Z_n$ とする. $f_n : Z_n \rightarrow X$ ($n = 1, 2, \dots$) を closed immersions とし, $f := \coprod_{n=1}^{\infty} f_n : Z \rightarrow X$ とする. このとき, f は quasi-compact でなく, Z は reduced でない.

f に対応する ring homomorphism は,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_X(X) = k[x] &\rightarrow \mathcal{O}_Z(Z) = \prod_{n=1}^{\infty} k[x]/(x^2). \\ F &\mapsto (F \bmod x^2)_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

ゆえに, $\ker \varphi = \bigcap_{n=1}^{\infty} (x^2) = (x^2)$. Proposition 4.1 より $Y := \mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$ が scheme-theoretic image である. したがって, $\mathrm{sp}(Y) = \overline{\mathrm{im} f} = \{O\}$.

上の例が $\mathrm{sp}(Y) = \overline{\mathrm{im} f}$ となる理由は, Z の全ての union の成分の構造が reduced ("1 重の点") ではないものの, "2 重の点" に抑えられているためである. すなわち, 列 $\{2\}_{n=1}^{\infty}$ の上限が 2 であり, 有限の値だからである. そこで一般の scheme について, その "有限の値" に対応する不変量を導入する.

Definition 6.2. ring A の non-reduced-degree $d(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を

$$d(A) := \begin{cases} n & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (\mathrm{nil} A)^{n-1} \neq 0, (\mathrm{nil} A)^n = 0. \\ \infty & \text{if } \forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{nil} A)^n \neq 0. \end{cases}$$

で定義する. scheme X の non-reduced-degree $d(X)$ を $\sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\}$ で定義する.

"non-reduced-degree" という名称は次の性質に由来する. 大雑把に言えば, この値は reduced という構造からどれだけ離れているかを表す.

Lemma 6.3.

(a) A を ring とするとき, A が reduced $\Leftrightarrow d(A) = 1$.

(b) X を scheme とするとき, X が reduced $\Leftrightarrow d(X) = 1$.

Proof. (a): A が reduced $\Leftrightarrow \text{nil } A = 0$
 $\Leftrightarrow d(A) = 1$.

(b): X が reduced $\Leftrightarrow \forall P \in X, \mathcal{O}_{X,P}$ が reduced
 $\Leftrightarrow \forall P \in X, d(\mathcal{O}_{X,P}) = 1$
 $\Leftrightarrow d(X) = \sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\} = 1$.

□

以下のいくつかの性質は, non-reduced-degree を計算する際有用である.

Lemma 6.4. X を scheme, $\{U_i\}_{i \in I}$ を open covering とするとき,

$$d(X) = \sup_{i \in I} \{d(U_i)\}.$$

Proof. $d(X) = \sup_{P \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,P})\}$
 $= \sup_{i \in I} \{\sup_{P \in U_i} \{d(\mathcal{O}_{U_i,P})\}\}$
 $= \sup_{i \in I} \{d(U_i)\}.$

□

Lemma 6.5. A を ring, $X := \text{Spec } A$ とするとき,

$$d(X) = d(A).$$

Proof. まず, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} (\text{nil } A)^n = 0 &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in X, ((\text{nil } A)^n)_{\mathfrak{p}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in X, ((\text{nil } A)_{\mathfrak{p}})^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in X, (\text{nil } (A_{\mathfrak{p}}))^n = 0. \end{aligned}$$

が成立する.

さて, $d(X) = \sup_{\mathfrak{p} \in X} \{d(\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}})\} = \sup_{\mathfrak{p} \in X} \{d(A_{\mathfrak{p}})\}$ であるから, $d(A) = \sup_{\mathfrak{p} \in X} \{d(A_{\mathfrak{p}})\}$ を示せばよい.

まず, $d(A) = \infty$ とする. このとき, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $(\text{nil } A)^n = 0$. すなわち, $\exists \mathfrak{p} \in X$ s.t. $(\text{nil } (A_{\mathfrak{p}}))^n \neq 0$. ゆえに, $d(A_{\mathfrak{p}}) > n$. まとめると, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathfrak{p} \in X$ s.t. $d(A_{\mathfrak{p}}) > n$ であり, これは $\sup_{\mathfrak{p} \in X} \{d(A_{\mathfrak{p}})\} = \infty$ を意味する.

次に, $d(A) < \infty$ とする. このとき, $(\text{nil } A)^{d(A)} = 0$ より, $\forall \mathfrak{p} \in X$ に対して $(\text{nil } (A_{\mathfrak{p}}))^{d(A)} = 0$. よって, $\sup_{\mathfrak{p} \in X} \{d(A_{\mathfrak{p}})\} \leq d(A)$. 一方, $(\text{nil } A)^{d(A)-1} \neq 0$ より $\exists \mathfrak{p} \in X$ s.t. $(\text{nil } (A_{\mathfrak{p}}))^{d(A)-1} \neq 0$. このとき, $d(A_{\mathfrak{p}}) \geq d(A)$. したがって, $d(A) = \sup_{\mathfrak{p} \in X} \{d(A_{\mathfrak{p}})\}$. □

Lemma 6.6. X を scheme とするとき,

$$d(X) = \sup \{d(\mathcal{O}_X(U)) \mid U \subseteq X: \text{open}\}.$$

Proof. ($\leq$): Lemma 6.4, 6.5 より,

$$\begin{aligned} d(X) &= \sup \{d(U) \mid U \subseteq X: \text{open affine}\} \\ &= \sup \{d(\mathcal{O}_X(U)) \mid U \subseteq X: \text{open affine}\} \\ &\leq \sup \{d(\mathcal{O}_X(U)) \mid U \subseteq X: \text{open}\}. \end{aligned}$$

($\geq$): $d(X) = \infty$ のときは明らかなので, $d := d(X) < \infty$ とする. 任意の open subset $U \subseteq X$ をとる. $s_j \in \text{nil } \mathcal{O}_X(U)$ ($1 \leq j \leq d$) をとって, $s := s_1 \cdots s_d$ とする. このとき任意の $P \in U$ をとると, $(s_j)_P \in \text{nil } \mathcal{O}_{X,P}$ である. 実際, ある $n_j \in \mathbb{N}$ が存在して $s_j^{n_j} = 0$ となり, $((s_j)_P)^{n_j} = (s_j^{n_j})_P = 0$ in $\mathcal{O}_{X,P}$. ゆえに, $s_P = (s_1)_P \cdots (s_d)_P \in (\text{nil } \mathcal{O}_{X,P})^d = 0$. よって, $s = 0$. すなわち, $(\text{nil } \mathcal{O}_X(U))^d = 0$ であり, $d(\mathcal{O}_X(U)) \leq d = d(X)$. $\square$

Example 6.7. k を field とする.

- (a) $X := \text{Spec } k[x]/(x^n)$ のとき $d(X) = n$.
- (b) $X := \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r})$ のとき $d(X) = \max\{n_1, \dots, n_r\}$.
- (c) $X := \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r})$ のとき $d(X) = \sum(n_i - 1) + 1$.
- (d) $X := \text{Spec } k[x_1, x_2, \dots]/(x_1^2, x_2^2, \dots)$ のとき $d(X) = \infty$.
- (e) $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \text{Spec } k[x]/(x^n)$ のとき $d(Z) = \infty$.
- (f) $Z := \coprod_{n=1}^{\infty} \text{Spec } k[x]/(x^2)$ のとき $d(Z) = 2$.

Proof. (a): $A := k[x]/(x^n) = k[\bar{x}]$ とおくと, $\text{nil } A = (\bar{x}) \not\subseteq$,

$$\begin{aligned} (\text{nil } A)^{n-1} &= (\bar{x}^{n-1}) \neq 0, \\ (\text{nil } A)^n &= (\bar{x}^n) = 0. \end{aligned}$$

(b): $A := k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}) = k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$, $d := \max\{n_1, \dots, n_r\}$ とおくと, $\text{nil } A = (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_r) \not\subseteq$,

$$\begin{aligned} (\text{nil } A)^{d-1} &= (\overline{x_1 \cdots x_r}^{d-1}) \neq 0, \\ (\text{nil } A)^d &= (\overline{x_1 \cdots x_r}^d) = 0. \end{aligned}$$

(c): $A := k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r}) = k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$, $d := \sum(n_i - 1) + 1$ とおくと, $\text{nil } A = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \not\subseteq$,

$$\begin{aligned} (\text{nil } A)^{d-1} &= (\bar{x}_1^{m_1} \cdots \bar{x}_r^{m_r} \mid m_i \geq 0, m_1 + \cdots + m_r = d-1) \\ &= (\bar{x}_1^{n_1-1} \cdots \bar{x}_r^{n_r-1}) \neq 0, \\ (\text{nil } A)^d &= (\bar{x}_1^{m_1} \cdots \bar{x}_r^{m_r} \mid m_i \geq 0, m_1 + \cdots + m_r = d) = 0. \end{aligned}$$

(d): $A := k[x_1, x_2, \dots]/(x_1^2, x_2^2, \dots) = k[\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots]$ とおくと, $\text{nil } A = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots)$ である. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $0 \neq \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in (\text{nil } A)^n$ ゆえ $(\text{nil } A)^n \neq 0$.

(e): $d(Z) = \sup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \infty$ ((a) および Lemma 6.4).

(f): $d(Z) = \sup_{n=1}^{\infty} \{2\} = 2$ ((a) および Lemma 6.4). $\square$

Remark 6.8. Example 6.7(d) より, X が quasi-compact であっても $d(X) < \infty$ であるとは限らない.

一方, 以下の議論で使わない事実であるが, X が noetherian (すなわち各 A_i が noetherian ring となるような finite open affine covering $\{\text{Spec } A_i\}_{i=1}^N$ を持つ) ならば $d(X) < \infty$ である. 実際, A が noetherian ring とすると, $\text{nil } A = (a_1, \dots, a_r)$ と表せる. $a_j \in \text{nil } A$ であるから, ある $n_j \in \mathbb{N}$ によって $a_j^{n_j} = 0$. このとき, $n = \sum_{j=1}^r (n_j - 1) + 1$ とおくと $(\text{nil } A)^n = 0$ であるから $d(A) < \infty$. これが各 A_i について成立するので, $d(X) = \sup_{i=1}^N \{d(A_i)\} < \infty$.

6.2 一般化

Example 6.7 において, (e) は $\text{sp}(Y) \supsetneq \overline{\text{im } f}$ となった例 (Example 4.3) であり, (f) は $\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$ となった例 (Example 6.1) である. このことから, $d(Z)$ が有限ならば $\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$ が成立すると予想される. 実際, その直感は正しい.

まず, X が affine の場合を示す.

Proposition 6.9. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism, X を affine とする. このとき, $d(Z) < \infty$ ならば, scheme-theoretic image Y について,

$$\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$$

が成立する.

Proof. Proposition 4.2 の証明と同じ記号を使う.

$$\begin{aligned} \overline{\text{im } f} &\supseteq \bigcup_{k \in K} V((\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)) \\ Y &= V\left(\bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)\right) \end{aligned}$$

が成立するところまでは Proposition 4.2 の証明と同じである.

$d := d(Z) < \infty$ とすると $\sqrt{0}^d = 0$ in $\mathcal{O}_Z(W_k)$ (Lemma 6.6). A の ideal $\mathfrak{a}$ によって, $\overline{\text{im } f} = V(\mathfrak{a})$ と表しておく. このとき, 各 $k \in K$ に対して, $V(\mathfrak{a}) \supseteq V((\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0))$ より,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{a}} &\subseteq \sqrt{(\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)} \\ &= (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(\sqrt{0}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathfrak{a}}^d &\subseteq (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(\sqrt{0})^d \\
&\subseteq (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(\sqrt{0}^d) \\
&= (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0).
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathfrak{a}}^d &\subseteq \bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0), \\
V(\sqrt{\mathfrak{a}}^d) &\supseteq V\left(\bigcap_{k \in K} (\rho_k \circ \varphi)^{-1}(0)\right).
\end{aligned}$$

よって, $\overline{\text{im } f} = V(\sqrt{\mathfrak{a}}^d) \supseteq Y$. 逆の包含関係は明らかである. $\square$

次に, 一般の scheme の場合について一般化する. 実は, 後に Example 6.13 で見るように $d(Z) < \infty$ は貼り合わせ可能性の十分条件にはなっていない. ゆえに, Theorem 4.11 の証明のように容易ではなく, 大域的構成法 (Theorem 5.14) で得られるものについて考察しなければならない.

Theorem 6.10. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism とする. このとき, $d(Z) < \infty$ ならば, scheme-theoretic image Y について,

$$\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$$

が成立する. 特に Z が reduced ($d(Z) = 1$) ならば $\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$ が成立する.

Proof. $\overline{\text{im } f}$ に reduced structure を入れた closed subscheme の ideal sheaf を $\mathcal{I}$ とする. $d := d(Z)$ とし, $\mathcal{I}^d$ について考える. これは, 各 open subset $U \subseteq X$ に対して $\mathcal{O}_X(U)$ の ideal $\mathcal{I}(U)^d$ を対応させる X 上の ideal presheaf $\text{pre-}\mathcal{I}^d$ を sheaf 化した X 上の ideal sheaf である. $F : \mathcal{I}^{\otimes d} \rightarrow \mathcal{O}_X$ を埋め込み $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X$ から定まる morphism とすると, $\mathcal{I}^d = \text{im } F$ である. $\mathcal{I}$ は quasi-coherent だから $\mathcal{I}^{\otimes d}$ も quasi-coherent (Lemma 5.4(b)) であり, $\text{im } F$ も quasi-coherent (Lemma 5.5) である.

$\{U_i\}_{i \in I}$ を X の open affine subsets 全体とする. $\mathcal{I}^d|_{U_i} = (\mathcal{I}(U_i)^d)^\sim$ であるから, $\mathcal{I}^d(U_i) = \mathcal{I}(U_i)^d$ である.

$\sqrt{0}^d = 0$ in $\mathcal{O}_Z(f^{-1}(U_i))$ (Lemma 6.6) に注意すると,

$$\begin{aligned}
\sqrt{f^\#(U_i)^{-1}(0)}^d &= f^\#(U_i)^{-1}(\sqrt{0})^d \\
&\subseteq f^\#(U_i)^{-1}(\sqrt{0}^d) \\
&= f^\#(U_i)^{-1}(0).
\end{aligned}$$

すなわち, $\sqrt{\ker f^\#(U_i)}^d \subseteq \ker f^\#(U_i)$.

$d(f^{-1}(U_i)) \leq d < \infty$ より $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ について Proposition 6.9 を適用すると,

$$\begin{aligned}
V(\ker f^\#(U_i)) &= \overline{\operatorname{im}(f|_{f^{-1}(U_i)})}^{U_i} \\
&= \overline{\operatorname{im} f \cap U_i}^{U_i} \\
&\subseteq \overline{\operatorname{im} f} \cap U_i \\
&= V(\mathcal{I}(U_i)), \\
\sqrt{\ker f^\#(U_i)} &\supseteq \sqrt{\mathcal{I}(U_i)} \supseteq \mathcal{I}(U_i),^7 \\
\ker f^\#(U_i) &\supseteq \sqrt{\ker f^\#(U_i)}^d \supseteq \mathcal{I}(U_i)^d = \mathcal{I}^d(U_i).
\end{aligned}$$

さて, 任意の open subset $U \subseteq X$ をとると, $\{U_i\}_{i \in J}$ が U の open affine covering となるように $J \subseteq I$ をとることができる. $\ker f^\#$ が sheaf であることに注意すれば, $\forall s \in \mathcal{O}_X(U)$ に対して,

$$\begin{aligned}
s \in \mathcal{I}^d(U) &\Rightarrow s|_{U_i} \in \mathcal{I}^d(U_i) \quad (\forall i \in J) \\
&\Rightarrow s|_{U_i} \in (\ker f^\#)(U_i) \quad (\forall i \in J) \\
&\Rightarrow s \in (\ker f^\#)(U).
\end{aligned}$$

よって, $\mathcal{I}^d \subseteq \ker f^\#$ in $\mathcal{O}_X$.

以上より, $\mathcal{I}^d \in \mathfrak{I}_f$ (Corollary 5.9 参照). 一方 $\mathcal{I}_Y$ は $\mathfrak{I}_f$ の最大元であるから, $\mathcal{I}^d \subseteq \mathcal{I}_Y$. よって,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sp}(Y) &= \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y) \\
&\subseteq \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^d) \\
&\stackrel{(*)}{=} \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \\
&= \overline{\operatorname{im} f}.
\end{aligned}$$

(*) について: $\forall P \in X$ に対して,

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^d) &\Leftrightarrow (\mathcal{I}^d)_P \subsetneq \mathcal{O}_{X,P} \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{I}_P)^d \subsetneq \mathcal{O}_{X,P} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I}_P \subsetneq \mathcal{O}_{X,P} \\
&\Leftrightarrow P \in \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}).
\end{aligned}$$

逆の包含関係は明らかである. □

ところで, Z が reduced ならば Y も reduced であった (Theorem 5.14). これを一般化したものが次の Theorem である.

⁷実は $\sqrt{\mathcal{I}(U_i)} = \mathcal{I}(U_i)$ が成立する (Theorem 6.11 の証明).

Theorem 6.11. $f : Z \rightarrow X$ を schemes の morphism とする. このとき, scheme-theoretic image Y について,

$$d(Y) \leq d(Z)$$

が成立する. 特に Z が reduced ($d(Z) = 1$) ならば Y も reduced ($d(Y) = 1$) である.

Proof. $d(Z) = \infty$ の場合は明らかである. そこで $d(Z) < \infty$ の場合を示す. Theorem 6.10 の証明と同じ記号を使用する. $\mathcal{J}$ は reduced closed subscheme の ideal sheaf であったから, $\mathcal{O}_X(U_i)/\mathcal{J}(U_i)$ が reduced ゆえ, $\sqrt{\mathcal{J}(U_i)} = \mathcal{J}(U_i)$ である. 各 i に対して,

$$\begin{aligned} V(\mathcal{J}_Y(U_i)) &= Y \cap U_i \\ &= \overline{\text{im } f} \cap U_i \\ &= V(\mathcal{J}(U_i)), \end{aligned}$$

$$\sqrt{\mathcal{J}_Y(U_i)} = \sqrt{\mathcal{J}(U_i)} = \mathcal{J}(U_i).$$

$\mathcal{J}^d \subseteq \mathcal{J}_Y$ であったから,

$$\sqrt{\mathcal{J}_Y(U_i)}^d = \mathcal{J}(U_i)^d \subseteq \mathcal{J}_Y(U_i),$$

$$(\text{nil}(\mathcal{O}_X(U_i)/\mathcal{J}_Y(U_i)))^d = (\sqrt{\mathcal{J}_Y(U_i)}/\mathcal{J}_Y(U_i))^d = 0.$$

$Y \cap U_i = \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U_i)/\mathcal{J}_Y(U_i))$ であることに注意すると, $d(Y \cap U_i) \leq d$. したがって, $d(Y) = \sup_{i \in I} \{d(Y \cap U_i)\} \leq d = d(Z)$. $\square$

Example 6.1 では $d(Y) = d(Z) = 2$ となったが, 一般には等号は成立しない. 次のような例がある.

Example 6.12. k を field とし, $X := \text{Spec } k[x]$ (直線), $Z := \text{Spec } k[x, y]/(y^2)$ (2 重直線) とする. $\varphi : k[x] \rightarrow k[x, y]/(y^2)$ を自然な ring homomorphism とし, φ に対応する morphism を $f : Z \rightarrow X$ (x -軸への射影) とする. このとき, $d(Z) = 2$. 一方, $\ker \varphi = k[x] \cap (y^2) = 0$ より $Y = X$ であり, $d(Y) = 1$.

6.3 貼り合わせ可能性および ideal sheaf についての考察

今 $\text{sp}(Y) = \overline{\text{im } f}$ のための十分条件は non-reduced-degree が有限という条件まで緩められることを見た. そこで, 自然に以下の疑問が生まれる:

- $d(Z) < \infty$ という仮定で貼り合わせによる構成が可能か.
- $d(Z) < \infty$ という仮定で $\mathcal{J}_Y = \ker f^\#$ が成立するか.

これらはいずれも ”局所的に見ても scheme-theoretic image になっているか” という問題である. 第 4 節での証明 (Proposition 4.8, 4.9, Theorem 4.10) から次の問題に帰着される:

- non-reduced-degree が有限という仮定で Lemma 4.7(c) が成立するか

この問題は次の反例により否定的に解決される.

Example 6.13. k を field とし, $A := k[x, y]$, $\mathfrak{a}_n := (x^n y, xy^2)$ in A , $A_n := A/\mathfrak{a}_n$, $Z_n := \text{Spec } A_n$ ($n \geq 2$) とする. これは, $\mathbb{A}_k^2$ の x -軸と y -軸の union にさまざまな構造を入れたものである. $Z := \coprod_{n=2}^{\infty} Z_n$ とする.

このとき, $\text{nil } A_n = (xy \bmod \mathfrak{a}_n) \neq 0$, $(\text{nil } A_n)^2 = (x^2 y^2 \bmod \mathfrak{a}_n) = 0$. ゆえに, $d(Z_n) = d(A_n) = 2$. よって, $d(Z) = \sup_{n=2}^{\infty} \{d(Z_n)\} = 2 < \infty$.

ところで, $\mathcal{O}_Z(Z) = \prod_{n=2}^{\infty} A_n$. $a := (x \bmod \mathfrak{a}_n)_{n=2}^{\infty} \in \mathcal{O}_Z(Z)$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Z_n}(Z_n \cap Z_a) &= \mathcal{O}_{Z_n}(D(x \bmod \mathfrak{a}_n)) \\ &= A_x / (x^n y, xy^2) \\ &= A_x / (y, y^2) \\ &= A_x / (y), \\ \mathcal{O}_Z(Z_a) &= \prod_{n=2}^{\infty} A_x / (y). \end{aligned}$$

そこで, $b := (y \bmod \mathfrak{a}_n)_{n=2}^{\infty} \in \mathcal{O}_Z(Z)$ とすると, $b|_{Z_a} = (y \bmod (y))_{n=2}^{\infty} = 0$ in $\mathcal{O}_Z(Z_a)$. しかし, $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して, $a^m b = (x^m y \bmod \mathfrak{a}_n)_{n=2}^{\infty} \neq 0$. 実際, $x^m y \bmod \mathfrak{a}_{m+1} \neq 0$. したがって, non-reduced-degree が有限でも Lemma 4.7(c) は成立しない.

次に, $X := \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } A$ とする. $f_n : Z_n \rightarrow X$ を closed immersion とし, $f := \coprod_{n=2}^{\infty} f_n : Z \rightarrow X$ とする (Figure 3 参照).

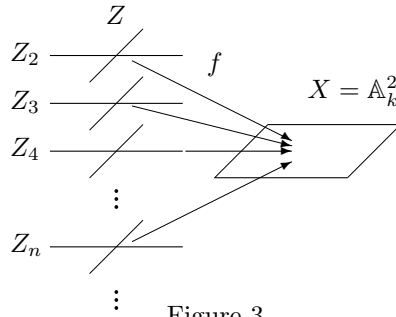


Figure 3.

このとき, f に対応する ring homomorphism は,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_X(X) = A &\rightarrow \mathcal{O}_Z(Z) = \prod_{n=2}^{\infty} A_n. \\ F &\mapsto (F \bmod \mathfrak{a}_n)_{n=2}^{\infty} \end{aligned}$$

ゆえに, $\ker \varphi = \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathfrak{a}_n = (xy^2)$. 実際, $F \in \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathfrak{a}_n$ かつ $F \neq 0$ とし $m := \deg_x F$ とおくと, 特に $F \in \mathfrak{a}_{m+1}$ だから, $F = x^{m+1}yG + xy^2H$ ($G, H \in A$) と表せる. $\deg_x$ が m 以下の部分を比較すれば, $F = xy^2H' \in (xy^2)$. ただし, H' は H の $\deg_x$ が $m-1$ 以下の部分である.

よって, $Y := \operatorname{Spec} A/(xy^2)$ が scheme-theoretic image である. $\operatorname{sp}(Y) = \overline{\operatorname{im} f} = V(xy)$ となっており, 確かに Theorem 6.10 が成立していることが確認できる. また, $d(Y) = d(Z) = 2$ であり, Theorem 6.11 も成立している.

さて, open subset $U := D(x) \subset X$ について考える.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(Y \cap U) &= \mathcal{O}_Y(D(x \bmod xy^2)) \\ &= A_x/(xy^2) \\ &= A_x/(y^2). \end{aligned}$$

よって, $\mathcal{I}_Y(U) = (y^2)$ in A_x .

一方, $\mathcal{O}_Z(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Z(Z_a) = \prod_{n=2}^{\infty} A_x/(y)$ であり,

$$\begin{aligned} f^\#(U) : \mathcal{O}_X(U) = A_x &\rightarrow \mathcal{O}_Z(f^{-1}(U)) = \prod_{n=2}^{\infty} A_x/(y). \\ F &\mapsto (F \bmod (y))_{n=2}^{\infty} \end{aligned}$$

よって, $\ker f^\#(U) = \bigcap_{n=2}^{\infty} (y) = (y)$ in A_x .

したがって, $\mathcal{I}_Y \neq \ker f^\#$.

Remark 6.14. Example 6.13 からわかるように, 一般に scheme の closed subset と有限値 $2 \leq d < \infty$ を与えても, non-reduced-degree が d となるような subscheme の構造の入れ方はいくつも存在する. これが, $d(Z) < \infty$ という条件が貼り合わせ可能性や $\mathcal{I}_Y = \ker f^\#$ のための十分条件にならない原因である. 一方 $d = 1$ のとき, non-reduced-degree が 1 (reduced) となるような構造は一意に決まる. この性質により, reduced という条件はこれらの十分条件になる.

謝辞

本論文を執筆するにあたり、指導教員である楫元教授には多くの時間を割いて親切に御指導して頂き、多くの有益な御助言も頂きました。心から感謝するとともに深く御礼申し上げます。また、さまざまな面でお世話になった楫研究室の皆様にも感謝致します。

参考文献

- [A-M] M.F.Atiyah, I.G.MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969)
- [G-D.1] A.Grothendieck, J.Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I. Le langage des schémas*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S.4 (1960)
- [G-D.2] A.Grothendieck, J.Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S.8 (1961)
- [H] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)
- [M] H.Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press (1986)