「超立方体回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式について」

菅本守

2010 年 2 月 8 日

以下は、本論文で得られた結果である。

定理 A

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、$A = (a_{ij})$ とする。$G_3 = \{A \in GL(3, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0 \ or\ 1 \text{ or } -1, A \in O(3), \det A = 1\}$ とおく。多項式 f_1, f_2, f_3, f_4 をそれぞれ

$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$

$f_2(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$

$f_3(x, y, z) = x^2y^2z^2,$

$f_4(x, y, z) = (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)xyz,$

とする。このとき

$$\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$$

が成り立つ。

補題 A

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、$G_4 := \{A \in GL(4, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0,\ 1 \text{ or } -1, A \in O(4), \det A = 1\}$ とする。このとき

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}, z) = \frac{1 + z^{16}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)}$$

となる。

補題 B

$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$

$f_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + z^2w^2,$

$f_3 = x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2z^2w^2 + y^2z^2w^2,$

$f_4 = x^2y^2z^2w^2,$

$f_5 = (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x^2 - w^2)(y^2 - z^2)(y^2 - w^2)(z^2 - w^2)xyzw.$

とおくと

$$f_5^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

となるような $g \in \mathbf{C}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ が存在する。

定理 B

$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$

$f_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + z^2w^2,$

$f_3 = x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2z^2w^2 + y^2z^2w^2,$

$f_4 = x^2y^2z^2w^2,$

$f_5 = (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x^2 - w^2)(y^2 - z^2)(y^2 - w^2)(z^2 - w^2)xyzw.$

とおく。このとき、

$$\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$$

となる。

補題 C

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、$A=(a_{ij})$ とおく。$G_5:=\{A\in GL(5,\mathbf{C}):a_{ij}=0,1,\mathrm{or}-1,A\in O(5),det(A)=1\}$ とおく。このとき、

$$\Phi(\mathbf{C}[x,y,z,w,v]^{G_5},z)=\frac{1+z^{25}}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)(1-z^8)(1-z^{10})}$$

となる。

定理 C

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、$A=(a_{ij})$ とおく。$G_5:=\{A\in GL(5,\mathbf{C}):a_{ij}=0,1,\mathrm{or}-1,A\in O(5),det(A)=1\}$ とおく。

$f_1=x^2+y^2+z^2+w^2+v^2$,

$f_2=x^2y^2+x^2z^2+x^2w^2+x^2v^2+y^2z^2+y^2w^2+y^2v^2+z^2w^2+z^2v^2$,

$f_3=x^2y^2z^2+x^2y^2w^2+x^2y^2v^2+x^2z^2w^2+x^2z^2v^2+x^2w^2v^2+y^2z^2w^2+y^2z^2v^2+y^2w^2v^2+z^2w^2v^2$,

$f_4=x^2y^2z^2w^2+x^2y^2z^2v^2+x^2y^2w^2v^2+x^2z^2w^2v^2+y^2z^2w^2v^2$,

$f_5=x^2y^2z^2w^2v^2$

$f_6=(x^2-y^2)(x^2-z^2)(x^2-w^2)(x^2-v^2)(y^2-z^2)(y^2-w^2)(y^2-v^2)(z^2-w^2)(z^2-v^2)(w^2-v^2)xyzwv.$

とおく。このとき、

$$\mathbf{C}[x,y,z,w,v]^{G_5}=\mathbf{C}[f_1,f_2,f_3,f_4,f_5]$$

が成り立つ。

予想 A

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、$A=(a_{ij})$ とする。$G_n:=\{A\in GL(n,\mathbf{C}):a_{ij}=0,1,\mathrm{or}-1,A\in O(n),detA=1\}$ とおく。このとき $\mathbf{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ に対するヒルベルト級数は

$$\Phi(\mathbf{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{G_n},z)=\frac{1+z^{n^2}}{(1-z^2)(1-z^4)\cdots(1-z^{2n})}$$

となる。

予想 B

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、$A=(a_{ij})$ とする。$G_n:=\{A\in GL(n,\mathbf{C}):a_{ij}=0,1,\mathrm{or}-1,A\in O(n),detA=1\}$ とおくと、

$$\mathbf{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{G_n}=\mathbf{C}[f_1,f_2,\ldots,f_n]$$

$f_1=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$

$f_2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+\ldots+x_{j_1}^2x_{j_2}^2+\ldots+x_{n-1}^2x_n^2$

$f_3=x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_4^2+\ldots+x_{j_1}^2x_{j_2}x_{j_3}^2+\ldots+x_{n-2}^2x_{n-1}^2x_n^2$

$f_4=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2+\ldots+x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2x_{j_4}^2+\ldots+x_{n-3}^2x_{n-2}^2x_{n-1}^2x_n^2$

$\vdots$

$f_n=x_1^2x_2^2\cdots x_n^2$

$f_{n+1}=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2-x_3^2)\cdots(x_{n-1}^2-x_n^2)x_1x_2\cdots x_n$

$1\leq j_1\leq j_2\leq\ldots\leq j_r\leq n$

が成り立つ。すなわち、生成元は $n+1$ 個である。