

超立方体回転群により不変な部分環を生成する 斉次多項式について

菅本守

2010年2月1日

1 序文

次の定理が知られている。

定理

$\mathbf{C}$ を複素数体とする。

$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ のとき、

$$\mathbf{C}[x, y]^{G_2} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]$$

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y^2, \\ f_2 &= x^2 y^2, \\ f_3 &= (x^2 - y^2)xy. \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\mathbf{C}[x, y]^{G_2}$ は G_2 で不変な部分環とする。

この定理は原点を中心とした、辺の長さ2の正方形の回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式を示している。そこで私は、正方形と立方体を包括した4次元以上の一般の n 次元超立方体回転群を定義し、それらの回転群によって不変な部分環を生成する斉次多項式を $n = 3, n = 4, n = 5$ の場合について構成し、証明した。すなわち、

定理 A (5 ページ「 $n = 3$ の場合、定理 A」参照)

$n = 3$ のとき、生成元 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{C}[x, y, z]$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ f_2 &= x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2, \\ f_3 &= x^2 y^2 z^2, \\ f_4 &= (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)xyz. \end{aligned}$$

となる。

定理 B (10 ページ「7.3 定理 B」参照)

$n = 4$ のとき、生成元 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in \mathbf{C}[x, y, z, w]$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2, \\
f_2 &= x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + z^2w^2, \\
f_3 &= x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2z^2w^2 + y^2z^2w^2, \\
f_4 &= x^2y^2z^2w^2, \\
f_5 &= (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x^2 - w^2)(y^2 - z^2)(y^2 - w^2)(z^2 - w^2)xyzw.
\end{aligned}$$

となる。

$n = 5$ の場合も同様の形で書かれる。(12 ページ「8.3 定理 C」参照) さらに、 $n \geq 6$ の一般の n についても予想を立てた。(13 ページ「9 2つの予想」参照)

記号上の注意 アルファベットの A, B, C ... は本論文中で考えたもの、あるいは得られた結果であることを示す。アラビア数字 1, 2, 3 ... は参考文献に書かれた結果である。また、A.I.T とは Sturmfels 氏の「Algorithms in Invariant Theory」の略である。

2 定義と例

例 A ($n=2$)

2 次元立方体とは、平面上の正方形である。ここで正方形の領域を $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ とする。

例 B ($n=3$)

3 次元立方体とは、空間における正 6 面体である。ここで正 6 面体の領域を $\{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ とする。

ここで次の定義をおく。

定義 A (n 次元超立方体)

n 次元超立方体とは、領域が $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, \dots, -1 \leq x_n \leq 1\}$ となる図形のことである。

定義 B (n 次元超立方体回転群)

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $A = (a_{ij})$ とおく。このとき、 n 次元超立方体回転群 G_n とは

$$G_n = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1, \text{ or } -1, A \in O(n), \det A = 1\}$$

とする。

定義 1 (不変多項式)

$\mathbf{C}$ を複素数体、多項式 f を $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ とし、群 G を $G \subset GL(n, \mathbf{C})$ とする。 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とする。このとき、 f が G において不変であるとは、任意の $A \in G$ に対して $f(A\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ が成り立つことである。

定義 2 (斉次多項式)

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、多項式 f を $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ とする。 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$, $\mathbf{x} =$

$\{x_1, \dots, x_n\}$ とする。このとき f が d 次斉次多項式とは、 $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ とおくと、任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = d$ となることである。

3 n=2 の場合

$n = 2$ のとき、 $A = (a_{ij})$ とすると、

$$G_2 = \{A \in GL(2, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1 \text{ or } -1, A \in O(2), \det A = 1\}$$

となる。 G_2 は 4 元巡回群である。

命題 1 (example 2.2.4 (A.I.T))

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$f_2(x, y) = x^2 y^2,$$

$$f_3(x, y) = (x^2 - y^2)xy$$

このとき

$$\mathbf{C}[x, y] = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]$$

となる。

命題 1 の証明には、A.I.T によれば以下の定理 1 と補題 1 を用いる。その前に 1 つの定義をおく。

定義 3 (ヒルベルト級数)

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、群 G を $G \subset GL(n, \mathbf{C})$ とする。 $\mathbf{C}[\mathbf{x}] := \mathbf{C}[x_1 \dots x_n]$ のとき

$$\Phi(\mathbf{C}[\mathbf{x}]^G, z) := \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^G) z^d$$

とヒルベルト級数を定義する。ただし、 $\mathbf{C}[x, y]^G$ は G で不変な部分環、 $\mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^G = \{f \in \mathbf{C}[\mathbf{x}] : f \text{ は } d \text{ 次斉次式}\}$ とする。

4 定理と補題

定理 1 (theorem 2.2.1 (A.I.T))

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、群 G を $G \subset GL(n, \mathbf{C})$ とする。このとき

$$\Phi_G(\mathbf{C}[\mathbf{x}]^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(E - zA)}$$

となる。ただし、 $|G|$ は群 G の元の個数、 E は単位行列、 $\mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^G = \{f \in \mathbf{C}[\mathbf{x}] : f \text{ は } d \text{ 次斉次式}\}$ とする。

定理 1 の補足

$\mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^G$ は $\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = d\}$ を基底とする $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間になる。 $\dim \mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^G$ は $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間としての次元である。

定義 4 (代数的従属、代数的独立)

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、多項式 $f_1, \dots, f_s \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ のとき、 $f_1, \dots, f_s$ が代数的従属であるとは、ある $0 \neq g \in \mathbf{C}[y_1, \dots, y_s]$ があつて $g(f_1, \dots, f_s) = 0$ となることである。 $f_1, \dots, f_s$ が代数的独立であるとは、 $g(f_1, \dots, f_s) = 0$ となる $g \in \mathbf{C}[y_1, \dots, y_s]$ が $g = 0$ をのぞいて存在しないことである。

補題 1 (lemma2.2.3(A.I.T))

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、多項式 $f_1, \dots, f_s \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ を $\mathbf{C}$ 上の斉次多項式、 $d_i = \deg(f_i)$ とする。 $\mathbf{C}[f_1 \dots f_s] = R$ とかく。このとき $f_1 \dots f_s$ が代数的独立ならば

$$H(R, z) := \sum_{d=0}^{\infty} (\dim_{\mathbf{C}} R_d) z^d = \frac{1}{(1 - z^{d_1}) \dots (1 - z^{d_s})}$$

が成り立つ。ただし、 $R_d = \{g(f_1, \dots, f_s) \in R : g(f_1, \dots, f_s) \text{ は } \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n] \text{ の元として } d \text{ 次斉次多項式}\}$ とする。

補題 1 の補足

R_d は $\{f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_s^{\alpha_s} : d_1 \alpha_1 + \dots + d_s \alpha_s = d\}$ を基底とする $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間になる。 $\dim R_d$ は $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間としての次元である。

ここでは、 $n = 2$ の場合と同様の方法を用いて $n = 3$ の場合を示す。

5 定義

定義 5 (単項式順序)

$\mathbf{Z}_{\geq 0}^n$ に関する順序関係 $<$ が単項式順序であるとは、次をみたすことである。

- (1) $<$ は全順序である。
- (2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$ について、
 $\alpha > \beta$ ならば $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- (3) $\emptyset$ でない任意の部分集合 $A \subset \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$ は $>$ に関して最小元をもつ。

定義 6 (LT)

$\mathbf{C}$ を複素数体、多項式 f を $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ 、イデアル I を $I \subset \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ とする。ここで $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha}$ とおいたとき、 $\text{multidegree}(f) := \max\{\alpha \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n : c_{\alpha} \neq 0\}$ とおく。ただし、 $\max$ は単項式順序 $>$ に関する最大元とする。いま、 $\alpha_0 = \text{multidegree}(f)$ とおくと、 $LT(f) := c_{\alpha_0} \mathbf{x}^{\alpha_0}$ とする。また、 $LT(I) := \{LT(f) : f \in I\}$ とする。

定義 7 (グレブナ基底)

$\mathbf{C}$ を複素数体とする。単項式順序 $>$ を 1 つ決める。イデアル I を $I \subset \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ とする。このとき、有限部分集合 $F = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ がグレブナ基底であるとは、 $LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$ をみたすことである。ただし、 $\langle f_1, \dots, f_t \rangle = \{\sum_{i=1}^t h_i f_i : h_i \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n] \text{ (} f_1, \dots, f_t \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n] \text{)}\}$ とする。

この定義 7 から次の系 1 が成り立つ。

系 1 (グレブナ基底)

$I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ が成り立つ。

6 n=3 の場合, 定理 A

A.I.T の Sturmfels 氏の $n = 2$ の場合の証明方法を用いることによって、次の定理を証明できた。

定理 A

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $A = (a_{ij})$ とする。 $G_3 = \{A \in GL(3, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0 \text{ or } 1 \text{ or } -1, A \in O(3), \det A = 1\}$ とおく。多項式 f_1, f_2, f_3, f_4 をそれぞれ

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$$

$$f_3(x, y, z) = x^2 y^2 z^2,$$

$$f_4(x, y, z) = (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)xyz,$$

とする。このとき

$$\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$$

が成り立つ。

証明

f_1, f_2, f_3, f_4 は G_3 で不変なので

$$\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3} \supset \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$$

は成り立つ。いま、 G_3 の全ての元は以下になる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 1 より、mathematica を使って G_3 の 24 個全ての行列の、行列式に関する和をとれば、(プログラムは付録のプログラム 1 を参照)

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3}, z) &= \frac{1}{24} \left(\frac{1}{1-z^3} + \frac{9}{1+z-z^2+z^3} + \frac{6}{1-z+z^2-z^3} + \frac{1}{1-3z+3z^2-z^3} \right) \\
&= \frac{1+z^9}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}
\end{aligned} \tag{1}$$

以下で

$$H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4], z) = \frac{1+z^9}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}$$

となることを示す。

$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - f_1, x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 - f_2, x^2 y^2 z^2 - f_3 \rangle \subset \mathbf{C}[x, y, z, f_1, f_2, f_3]$$

とおく。I のグレブナ基底を F とおけば、mathematica の計算により (プログラムは付録のプログラム 2 参照)

$$F \cap \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3] = \{0\}$$

よって、 f_1, f_2, f_3 は代数的独立である。さらに補題 1 より、

$$H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_4], z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}$$

が成り立つ。また、 $I' = \langle x^2 + y^2 + z^2 - f_1, x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 - f_2, x^2 y^2 z^2 - f_3, (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)xyz - f_4 \rangle \subset \mathbf{C}[x, y, z, f_1, f_2, f_3, f_4]$

とおく。 I' のグレブナ基底を F' とおけば、mathematica の計算により、(プログラムは付録のプログラム 3 を参照)

$$F' \cap \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4] = \{-f_4^2 + f_1^2 f_2^2 f_3 - 4f_2^2 f_3 - 4f_1^3 f_3^2 + 18f_1 f_2 f_3^2 - 27f_3^3\}$$

よって $\mathbf{C}[x, y, z]$ の元としてみれば

$$-f_4^2 + f_1^2 f_2^2 f_3 - 4f_2^2 f_3 - 4f_1^3 f_3^2 + 18f_1 f_2 f_3^2 - 27f_3^3 = 0 \text{ in } \mathbf{C}[x, y, z]$$

となる。すなわち、

$$f_4^2 = f_1^2 f_2^2 f_3 - 4f_2^2 f_3 - 4f_1^3 f_3^2 + 18f_1 f_2 f_3^2 - 27f_3^3 \text{ in } \mathbf{C}[x, y, z]$$

ここで f_4 について見れば、2 次の項が 1 つだけなので $\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$ の全ての元は f_4 の 1 次の項と 0 次の項の和にすることができる。よって、

$$\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4] = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3] \oplus f_4 \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]$$

いま、 $\deg(f_3) = 9$ であるので、 $R = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]$, $R' = f_4 \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]$ とおくと、

$$\dim R'_{d+9} = \dim R_d, (d \geq 0)$$

となる。 $(R_d$ の定義は、補題 1 参照) ここで、

$$H(R, z) := \sum_{d=0}^{\infty} (\dim R_d) z^d$$

という定義を思い出すと、

$$H(R', z) = z^9 H(R, z)$$

であり、直和 $\oplus$ の性質を考えると、

$$\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4] = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]_d) z^d + z^9 \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3]_d) z^d$$

となる。さらに、補題 1 を用いると

$$\begin{aligned} H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4], z) &= \frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)} + \frac{z^9}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)} \\ &= \frac{1+z^9}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) と (2) より

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3}) = H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4], z)$$

ゆえに

$$\sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^G) z^d = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim_{\mathbf{C}} R_d) z^d$$

よって、任意の d に対して

$$\dim \mathbf{C}[\mathbf{x}]_d^{G_3} = \dim \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]_d$$

が成り立つ。以上より

$$\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$$

q.e.d

7 n=4 の場合

7.1 補題 A

$n=4$ の場合についても主定理で扱った同じ方法を用いて、 $\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}$ に関するヒルベルト級数を考えると、次の結果が得られる。

補題 A

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $G_4 := \{A \in GL(4, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1 \text{ or } -1, A \in O(4), \det A = 1\}$ とする。このとき

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}, z) = \frac{1 + z^{16}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)}$$

となる。

証明

G_4 は 192 個の行列の集合になる。定理 1 より、mathematica を使って、192 個の行列に関する行列式の和をとれば、(プログラムは付録のプログラム 4 参照) $\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}$ に関するヒルベルト級数は

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}, z) &= \frac{1}{192} \left(\frac{48}{1 + z^4} + \frac{42}{1 - 2z^2 + z^4} + \frac{12}{1 + 2z^2 + z^4} + \frac{1}{1 - 4z + 6z^2 - 4z^3 + z^4} \right. \\ &\quad + \frac{12}{1 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + z^4} + \frac{32}{1 - z - z^3 + z^4} + \frac{32}{1 + z + z^3 + z^4} + \\ &\quad \left. \frac{12}{1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + z^4} + \frac{1}{1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4} \right) \\ &= \frac{1 + z^{16}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)} \end{aligned}$$

となる。q.e.d

7.2 補題 B

定理 B の中で得られたヒルベルト級数は

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z]^{G_3}, z) = \frac{1 + z^9}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)}$$

であった。いま、上の補題 A で得られたヒルベルト級数は

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}, z) = \frac{1 + z^{16}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)}$$

である。定理 B の証明の中で重要な点は

$$f_4^2 = f_1^2 f_2^2 f_3 - 4f_2^2 f_3 - 4f_1^3 f_3^2 + 18f_1 f_2 f_3^2 - 27f_3^3 \text{ in } \mathbf{C}[x, y, z]$$

のように、 $f_4^2 =$ の形で表されることである。この形によって、 $\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$ の全ての元が f_4 の 0 次と 1 次の項で表されることが分かり、ひいては部分環 $\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$ に関する級数が

$$H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4], z) = \frac{1 + z^9}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)}$$

よって、次の補題を考える。

補題 B

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

$$f_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + z^2w^2,$$

$$f_3 = x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2z^2w^2 + y^2z^2w^2,$$

$$f_4 = x^2y^2z^2w^2,$$

$$f_5 = (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x^2 - w^2)(y^2 - z^2)(y^2 - w^2)(z^2 - w^2)xyzw.$$

とおくと

$$f_5^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

となるような $g \in \mathbf{C}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ が存在する。

証明

いま、 $f_1^a f_2^b f_3^c f_4^d$ という f_1, f_2, f_3, f_4 のべき $a, b, c, d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を考える。 $\deg(f_1) = 2, \deg(f_2) = 4, \deg(f_3) = 6, \deg(f_4) = 8, \deg(f_5) = 16$ であるので、 $f_5^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4)$ とかけるとすると、両辺の次数を比較して

$$16 \times 2 = 2a + 4b + 6c + 8d$$

を得る。よって

$$16 = a + 2b + 3c + 4d$$

このとき、 (a, b, c, d) の全ての組み合わせは以下の 62 通りである。

(0, 0, 0, 4), (0, 0, 4, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 2, 0, 3), (0, 2, 4, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 4, 0, 2), (0, 5, 2, 0),
 (0, 6, 0, 1), (0, 8, 0, 0), (1, 0, 1, 3), (1, 0, 5, 0), (1, 1, 3, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 3, 2, 0), (1, 4, 1, 1),
 (1, 6, 1, 0), (2, 0, 2, 2), (2, 1, 0, 3), (2, 1, 4, 0), (2, 2, 2, 1), (2, 3, 0, 2), (2, 4, 2, 0), (2, 5, 0, 1),
 (2, 7, 0, 0), (3, 0, 3, 1), (3, 1, 1, 2), (3, 2, 2, 0), (3, 3, 1, 1), (3, 5, 1, 0), (4, 0, 0, 3), (4, 0, 4, 0),
 (4, 1, 2, 1), (4, 2, 0, 2), (4, 3, 2, 0), (4, 4, 0, 1), (4, 6, 0, 0), (5, 0, 1, 2), (5, 1, 2, 0), (5, 2, 1, 1),
 (5, 4, 1, 0), (6, 0, 2, 1), (6, 1, 0, 2), (6, 2, 2, 0), (6, 5, 0, 0), (7, 0, 2, 0), (7, 1, 1, 1), (7, 3, 1, 0),
 (8, 0, 0, 2), (8, 1, 0, 2), (8, 2, 0, 1), (8, 4, 0, 0), (9, 0, 1, 1), (9, 2, 1, 0), (10, 0, 2, 0), (10, 1, 0, 1),
 (11, 1, 1, 0), (12, 0, 0, 1), (12, 2, 0, 0), (13, 0, 1, 0), (14, 1, 0, 0), (16, 0, 0, 0)

よって $f_5^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4)$ となる g が存在するかという問題は、 $s[1], s[2], \dots, s[62] \in \mathbf{C}$ とすると

$$\begin{aligned} (f_5)^2 = & s[1] * (f_4)^4 + s[2] * (f_3)^4 * (f_4) + s[3] * (f_2) * (f_3)^2 * (f_4)^2 + s[4] * (f_2)^2 * (f_4)^3 + \\ & s[5] * (f_2)^2 * (f_3)^4 + s[6] * (f_2)^3 * (f_3)^2 * (f_4) + s[7] * (f_2)^4 * (f_4)^2 + s[8] * (f_2)^5 * (f_3)^2 + \\ & s[9] * (f_2)^6 * (f_4) + s[10] * (f_2)^8 + s[11] * (f_1) * (f_3) * (f_4)^3 + s[12] * (f_1) * (f_3)^5 + \\ & s[13] * (f_1)(f_2) * (f_3)^3 * (f_4) + s[14] * (f_1) * (f_2)^2 * (f_3) * (f_4)^2 + s[15] * (f_1) * (f_2)^3 * (f_3)^2 + \\ & s[16] * (f_1) * (f_2)^4 * (f_3) * (f_4) + s[17] * (f_1) * (f_2)^6 * (f_3) + s[18] * (f_1)^2 * (f_3)^2 * (f_4)^2 + \\ & s[19] * (f_1)^2 * (f_2) * (f_4)^3 + s[20] * (f_1)^2 * (f_2) * (f_3)^4 + s[21] * (f_1)^2 * (f_2)^2 * (f_3)^2 * (f_4) + \\ & s[22] * (f_1)^2 * (f_2)^3 * (f_4)^2 + s[23] * (f_1)^2 * (f_2)^4 * (f_3)^2 + s[24] * (f_1)^2 * (f_2)^5 * (f_4) + \\ & s[25] * (f_1)^2 * (f_2)^7 + s[26] * (f_1)^3 * (f_3)^3 * (f_4) + s[27] * (f_1)^3 * (f_2) * (f_3) * (f_4)^2 + \\ & s[28] * (f_1)^3 * (f_2)^2 * (f_3)^2 + s[29] * (f_1)^3 * (f_2)^3 * (f_3) * (f_4) + s[30] * (f_1)^3 * (f_2)^5 * (f_3) + \\ & s[31] * (f_1)^4 * (f_4)^3 + s[32] * (f_1)^4 * (f_3)^4 + s[33] * (f_1)^4 * (f_2) * (f_3)^2 * (f_4) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s[34] * (f_1)^4 * (f_2)^2 * (f_4)^2 + s[35] * (f_1)^4 * (f_2)^3 * (f_3)^2 + s[36] * (f_1)^4 * (f_2)^4 * (f_4) + \\
& s[37] * (f_1)^4 * (f_2)^6 + s[38] * (f_1)^5 * (f_3) * (f_4)^2 + s[39] * (f_1)^5 * (f_2) * (f_3)^2 + \\
& s[40] * (f_1)^5 * (f_2)^2 * (f_3) * (f_4) + s[41] * (f_1)^5 * (f_2)^4 * (f_3) + s[42] * (f_1)^6 * (f_3)^2 * (f_4) + \\
& s[43] * (f_1)^6 * (f_2) * (f_4)^2 + s[44] * (f_1)^6 * (f_2)^2 * (f_3)^2 + s[45] * (f_1)^6 * (f_2)^5 + \\
& s[46] * (f_1)^7 * (f_3)^2 + s[47] * (f_1)^7 * (f_2) * (f_3) * (f_4) + s[48] * (f_1)^7 * (f_2)^3 * (f_3) + \\
& s[49] * (f_1)^8 * (f_4)^2 + s[50] * (f_1)^8 * (f_2) * (f_4)^2 + s[51] * (f_1)^8 * (f_2)^2 * (f_4) + \\
& s[52] * (f_1)^8 * (f_2)^4 + s[53] * (f_1)^9 * (f_3) * (f_4) + s[54] * (f_1)^9 * (f_2)^2 * (f_3) + \\
& s[55] * (f_1)^{10} * (f_3)^2 + s[56] * (f_1)^{10} * (f_2) * (f_4) + s[57] * (f_1)^{11} * (f_2) * (f_3) + \\
& s[58] * (f_1)^{12} * (f_4) + s[59] * (f_1)^{12} * (f_2)^2 + s[60] * (f_1)^{13} * (f_3) + s[61] * (f_1)^{14} * (f_2) + \\
& s[62] * (f_1)^{16}
\end{aligned}$$

という $s[1], s[2], \dots, s[62]$ が存在するかという問題に変わる。そこで (x, y, z, w) に相異なる 62 組の素数を代入し、mathematica を使って $s[1], s[2], \dots, s[62]$ に関する 62 個の連立方程式を立てて、それを解けば、 $s[1], s[2], \dots, s[62]$ は本論文の最後に添付した解になる。
よって、 $s[1], s[2], \dots, s[62]$ は存在し、従って $f_5^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4)$ の形でかける。

q.e.d

7.3 定理 B

まず、次の仮定をおく。

仮定 A

$$\begin{aligned}
f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2, \\
f_2 &= x^2 y^2 + x^2 z^2 + x^2 w^2 + y^2 z^2 + y^2 w^2 + z^2 w^2, \\
f_3 &= x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 w^2 + x^2 z^2 w^2 + y^2 z^2 w^2, \\
f_4 &= x^2 y^2 z^2 w^2,
\end{aligned}$$

とおく。このとき f_1, f_2, f_3, f_4 は代数的に独立である。

この仮定は、ほぼ成り立つと思われるが、証明はできなかった。 $n = 3$ の場合は計算機を使って証明した。しかし、 $n = 4$ の場合には計算量が多く計算機では、調べられなかったからである。この仮定に基づけば、次の定理が成り立つ。

定理 B

$$\begin{aligned}
f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2, \\
f_2 &= x^2 y^2 + x^2 z^2 + x^2 w^2 + y^2 z^2 + y^2 w^2 + z^2 w^2, \\
f_3 &= x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 w^2 + x^2 z^2 w^2 + y^2 z^2 w^2, \\
f_4 &= x^2 y^2 z^2 w^2, \\
f_5 &= (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x^2 - w^2)(y^2 - z^2)(y^2 - w^2)(z^2 - w^2)xyzw.
\end{aligned}$$

とおく。このとき、

$$\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$$

となる。

証明

補題 B より

$$f_5^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

という $g \in \mathbf{C}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ があるので、

$$\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5] = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4] \oplus f_5 \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$$

となる。よって、定理 A の証明と同様に $\deg(f_5) = 16$ と仮定 A を考えれば、

$$H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5], z) = \frac{1 + z^{16}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)}$$

を得る。よって、

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4}, z) = H(\mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5], z)$$

従って、

$$\mathbf{C}[x, y, z, w]^{G_4} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$$

q.e.d

8 n=5 の場合

8.1 補題 C

$n = 5$ の場合のヒルベルト級数はどうなるか。私は、次の結果を得た。

補題 C

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $A = (a_{ij})$ とおく。 $G_5 := \{A \in GL(5, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1, \text{ or } -1, A \in O(5), \det(A) = 1\}$ とおく。このとき、

$$\Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w, v]^{G_5}, z) = \frac{1 + z^{25}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)(1 - z^{10})}$$

となる。

証明

G_5 は 1920 個の行列の集合になる。定理 1 より、mathmatica を使って G_5 の 1920 個全ての行列の、行列式に関する和をとれば、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{C}[x, y, z, w, v]^{G_5}, z) = & \frac{1}{1920} \left(\frac{384}{1 - z^5} + \frac{160}{1 + z^2 - z^3 - z^5} + \frac{320}{1 - z^2 + z^3 - z^5} + \right. \\ & \frac{25}{1 + 3z + 2z^2 - 2z^3 - 3z^4 - z^5} + \frac{80}{1 + 2z + z^2 - z^3 - 2z^4 - z^5} + \\ & \frac{420}{1 + z - z^4 - z^5} + \frac{240}{1 - z + z^4 - z^5} + \frac{60}{1 - z + 2z^2 - 2z^3 + z^4 - z^5} + \\ & \left. \frac{130}{1 - z - 2z^2 + 2z^3 + z^4 - z^5} + \frac{80}{1 - 2z + z^2 - z^3 + 2z^4 - z^5} + \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{20}{1-3z+4z^2-4z^3+3z^4-z^5} + \frac{1}{1-5z+10z^2-10z^3+5z^4-z^5}}{1+z^{25}} \\ = \frac{1+z^{25}}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)(1-z^8)(1-z^{10})}$$

となる。

q.e.d

8.2 補題 D

補題 D

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2, \\ f_2 &= x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + x^2v^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + y^2v^2 + z^2w^2 + z^2v^2, \\ f_3 &= x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2y^2v^2 + x^2z^2w^2 + x^2z^2v^2 + x^2w^2v^2 + y^2z^2w^2 + y^2z^2v^2 + y^2w^2v^2 + z^2w^2v^2, \\ f_4 &= x^2y^2z^2w^2 + x^2y^2z^2v^2 + x^2y^2w^2v^2 + x^2z^2w^2v^2 + y^2z^2w^2v^2, \\ f_5 &= x^2y^2z^2w^2v^2 \\ f_6 &= (x^2-y^2)(x^2-z^2)(x^2-w^2)(x^2-v^2)(y^2-z^2)(y^2-w^2)(y^2-v^2)(z^2-w^2)(z^2-v^2)(w^2-v^2)xyzwv. \end{aligned}$$

とおくと

$$f_6^2 = g(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$$

となるような $g \in \mathbf{C}[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$ が存在する。

証明

証明は補題 B と同様

8.3 定理 C

次の仮定をおく。

仮定 B

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2, \\ f_2 &= x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + x^2v^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + y^2v^2 + z^2w^2 + z^2v^2, \\ f_3 &= x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2y^2v^2 + x^2z^2w^2 + x^2z^2v^2 + x^2w^2v^2 + y^2z^2w^2 + y^2z^2v^2 + y^2w^2v^2 + z^2w^2v^2, \\ f_4 &= x^2y^2z^2w^2 + x^2y^2z^2v^2 + x^2y^2w^2v^2 + x^2z^2w^2v^2 + y^2z^2w^2v^2, \\ f_5 &= x^2y^2z^2w^2v^2 \end{aligned}$$

とおく。このとき、 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 は代数的独立である。

この仮定に基づけば、次の定理が成り立つ。

定理 C

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $A = (a_{ij})$ とおく。 $G_5 := \{A \in GL(5, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1, \text{ or } -1, A \in O(5), \det(A) =$

1} とおく。

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2,$$

$$f_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + x^2v^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + y^2v^2 + z^2w^2 + z^2v^2,$$

$$f_3 = x^2y^2z^2 + x^2y^2w^2 + x^2y^2v^2 + x^2z^2w^2 + x^2z^2v^2 + x^2w^2v^2 + y^2z^2w^2 + y^2z^2v^2 + y^2w^2v^2 + z^2w^2v^2,$$

$$f_4 = x^2y^2z^2w^2 + x^2y^2z^2v^2 + x^2y^2w^2v^2 + x^2z^2w^2v^2 + y^2z^2w^2v^2,$$

$$f_5 = x^2y^2z^2w^2v^2$$

$$f_6 = (x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x^2 - w^2)(x^2 - v^2)(y^2 - z^2)(y^2 - w^2)(y^2 - v^2)(z^2 - w^2)(z^2 - v^2)(w^2 - v^2)xyzwv.$$

とおく。このとき、

$$\mathbf{C}[x, y, z, w, v]^{G_5} = \mathbf{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$$

が成り立つ。

証明

定理 B と同様

9 2つの予想

9.1 予想 A

これまでの定理 A, B, C から一般の $n \geq 2$ に対して、次のことが予想できる。

予想 A

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $A = (a_{ij})$ とする。 $G_n := \{A \in GL(n, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1, \text{ or } -1, A \in O(n), \det A = 1\}$ とおく。このとき $\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に対するヒルベルト級数は

$$\Phi(\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{G_n}, z) = \frac{1 + z^{n^2}}{(1 - z^2)(1 - z^4) \cdots (1 - z^{2n})}$$

となる。

9.2 予想 B

予想 B

$\mathbf{C}$ を複素数体とし、 $A = (a_{ij})$ とする。 $G_n := \{A \in GL(n, \mathbf{C}) : a_{ij} = 0, 1, \text{ or } -1, A \in O(n), \det A = 1\}$ とおくと、

$$\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{G_n} = \mathbf{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]$$

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$f_2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \dots + x_{j_1}^2x_{j_2}^2 + \dots + x_{n-1}^2x_n^2$$

$$f_3 = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + \dots + x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2 + \dots + x_{n-2}^2x_{n-1}^2x_n^2$$

$$f_4 = x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 + \dots + x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2x_{j_4}^2 + \dots + x_{n-3}^2x_{n-2}^2x_{n-1}^2x_n^2$$

$\vdots$

$$f_n = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$$

$$f_{n+1} = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2) \cdots (x_{n-1}^2 - x_n^2) x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_r \leq n$$

が成り立つ。すなわち、生成元は $n + 1$ 個である。

この論文を書くにあたって、楫元先生、鈴木拓君、石川大蔵さん、渡辺究さんには非常に多くのアドバイスをいただきました。この場を借りて楫先生、鈴木君、石川さん、渡辺さんに感謝いたします。さらに、この論文を完成させるために頑張り続けることができたのも家族の支えがあってこそです。家族に感謝します。

参考文献

Ideals, Varieties, and Algorithms 著者 David Cox, John Little, Donal O'Shea 出版 Springer Wien-New York
 Algorithms in Invariant Theory 著者 Bernd Sturmfels 出版 Springer