

$\mathbf{P}^3$ 上の射影直線に関する，結びとグラスマン多様体への像の構造とその一般次元への拡張

楫研究室所属 1G06L037-7 菅井 謙

1 目的・概要

[C] の第 8 章 6 節において，2つの多様体の結びと，グラスマン多様体への写像について記されており，その2つのことについて興味を持ち，研究しようと考えた．先ず，2つの多様体の結びの定義を次で行う．

Definition.2

$X \subset \mathbf{P}^3$, $Y \subset \mathbf{P}^3$ を variety とし，variety の結び (join) を次のように定義する．

$$X * Y = \{ux - vy | x \in X, y \in Y, x \neq y, (u : v) \in \mathbf{P}^1\}$$

そこで，この結びを理解しようと，次のことを考えた．

Question.1

$L_1 = \mathbf{Z}(x_2, x_3)$, $L_2 = \mathbf{Z}(x_0, x_1)$ の結びは，何になるのか．($\mathbf{Z}$ は零点集合)

この問題は，射影同値の概念を用いると，次のように結論できた．

Definition.2

$V_1 \subset \mathbf{P}^n$, $V_2 \subset \mathbf{P}^n$ を variety とする． $A \in GL(n+1, k)$ が存在して， $V_2 = A(V_1)$ となるとき， V_1 と V_2 は射影同値 (projective equivalent) という．

Proposition.1

k を field とし， $X \in \mathbf{P}^3$ と， $Y \in \mathbf{P}^3$ を variety とする．さらに，射影直線 L_1 と L_2 を，Question.1 で定義したものとする．このとき， $A(X) = L_1$, $A(Y) = L_2$ なる $A \in GL(4, k)$ が存在するならば， $X * Y = \mathbf{P}^3$ が成り立つ．

この事実に対して， $\mathbf{P}^n$ に対しても2つの多様体がどのようなときに結びが $\mathbf{P}^n$ となるのかを考えた．

Question.2

2つの variety $X \in \mathbf{P}^n$, $Y \in \mathbf{P}^n$ が， $X \cap Y = \emptyset$ であり，それぞれ，

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) &\cong \mathbf{P}^i \\ \mathbf{Z}(x_0, x_1, \dots, x_i) &\cong \mathbf{P}^{n-(i+1)} \end{aligned}$$

と射影同値となるときに，2つの variety X , Y の結びが $\mathbf{P}^n$ に一致するか．

この問題は，先程と同様に，肯定的に結論づけられた．

Proposition.2

k を field とし， $X \in \mathbf{P}^n$, $Y \in \mathbf{P}^n$ を variety とする．このとき， $X \cap Y = \emptyset$ であり， $A(X) \cong \mathbf{P}^i$, $A(Y) \cong \mathbf{P}^{n-(i+1)}$ なる $A \in GL(n+1, k)$ と $0 \leq i \leq n-1$ が存在するならば， $X * Y = \mathbf{P}^n$ が成り立つ．

次に，グラスマン多様体への写像 ω について考えた．[C] の第 8 章 6 節の定理 1.1 では，次のようなことを主張していた．

Theorem

$\mathbf{P}^3$ の射影直線の相異なる2点， $p = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$, $q = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ に対して， $\omega_3 : \{\mathbf{P}^n \text{ 上の射影直線全体} \}$

$$\longrightarrow \mathbf{Z}(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12}) \subset \mathbf{P}^3$$

を次のように定義する．

$$\omega_3 \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (z_{ij})_{0 \leq i < j \leq 3} := (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq 3}$$

このとき, ω_3 は全単射である. また,

$$z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12} = 0$$

を, Plücker の関係式という. ■

$\mathbf{P}^4$ において, 同様に定義すると, Plücker の関係式

$$z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} = 0 \quad (0 \leq i < j < k < l \leq 4)$$

が成り立つことが分かった. そこで, $\mathbf{P}^n$ の場合に対しても, 次のことが成り立つのかを考えた.

Question.4

$\mathbf{P}^n$ の射影直線の相異なる 2 点, $p = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$, $q = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$ に対して, $\mathbf{P}^n$ の射影

直線から, $\binom{n+1}{2} - 1$ 次元射影空間への写像

$\omega_n : \{\mathbf{P}^n \text{ 上の射影直線全体} \}$

$\longrightarrow \mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$

を次のように定義したとき,

$$\omega_n \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = (z_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} := (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq n}$$

この ω_n は全単射か. ■

この問題も肯定的であった.

Proposition.4

Question.4 で定義された, ω_n は全単射. ■

2 結論

まとめると, 次のことが分かった.

- i. 2つの $X \cap Y = \emptyset$ を満たす variety $X \in \mathbf{P}^n$, $Y \in \mathbf{P}^n$ に対して, $A(X) \cong \mathbf{P}^i$, $A(Y) \cong \mathbf{P}^{n-(i+1)}$ なる $A \in GL(n+1, k)$ と $0 \leq i \leq n-1$ が存在するとき, X と Y の結びが, $\mathbf{P}^n$ と一致する.
- ii. $\mathbf{P}^n$ の射影直線全体と, 写像 ω_n によって, $\binom{n+1}{2} - 1$ 次元射影空間の sub variety

$$\mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$$

と 1 対 1 対応となっている.

3 参考文献

[C]: D.Cox J.Little D.O'Shea *Ideals, Varieties, and Algorithms*

-An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra

Springer-Verlag(1992)