

P^3 上の射影直線に関する，結びとグ
ラスマン多様体への像の構造とその
一般次元への拡張

楫研究室所属 1G06L037-7 菅井 謙

目 次

1	序文	3
2	概要	3
3	命題の証明	7
4	謝辞	10
5	参考文献	10

1 序文

[C] の第 8 章 6 節において、2 つの多様体の結びと、グラスマン多様体への写像について記されており、その 2 つのことについて興味を持ち、研究しようと考えた。まず、2 つの多様体の結びは、それぞれの多様体を結んでできる射影直線の集まりで定義する。したがって、射影空間における多様体の結びの簡単な例として、それぞれの多様体の任意の点において直線が定義できるように P^3 内の 2 つの多様体が交わらない場合、特に捩れの位置にある 2 本の射影直線を用いて理解しようと考えた。このとき、結びは、 P^3 と一致したことが判明した。そこで、 P^n についても、同様のことが成り立つのではないかと思い、結びが P^n となるような、2 つの多様体を見つけようと研究した。このとき、 P^i と同型な射影線形多様体と、 $P^{n-(i+1)}$ と同型な射影線形多様体が交わりを持たないとき、この 2 つの多様体の結びが、 P^n と一致することが判明した。次に、[C] の第 8 章 6 節の定理 1.1 において、 P^3 上の射影直線全体から、グラスマン多様体への写像 ω が全単射であることが書かれている。この写像は、[C] の第 8 章 6 節によれば、 n 次元射影空間上の射影直線全体にも拡張できると書かれていた。そこで、実際に、 n 次元射影空間上の射影直線全体から、多様体への全単射な写像 ω を構成して、 n 次元におけるグラスマン多様体の構造を見つけたいと考えた。そこで、最初に、 P^4 上の射影直線全体から、 P^9 への写像 ω_4 ($n=3$ のときを ω_3 とする。) を ω_3 と同様に定義したとき、 P^9 上の多様体で成り立つ関係式が、5 つ見つかったので、その関係式を零点とする集合と写像 ω_4 によって、全単射になるかを調べた結果、全単射となった。そこで、 P^n の場合においても同様の結果が得られると考え、関係式を予想した。それを、零点集合とする多様体と、 P^n の直線全体が、全単射になることを証明することができて、 P^n の直線全体の、グラスマン多様体への射の像の構造が判明した。

2 概要

まず、基本的な定義をする。

Definition.1

k を field とする。また、 P^n の斉次座標を $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ とし、 $f \in k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ を斉次多項式とする。このとき、 P^n における零点集合を、

$$Z(f) = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) | f(a_0, a_1, \cdots, a_n) = 0\}$$

で定義する。

■

最初に、2 つ多様体の結びから考える。そこで、2 つの多様体の結びのを [C] と同様に定義する。

Definition.2

$X \subset \mathbf{P}^3$, $Y \subset \mathbf{P}^3$ を variety とし, variety の結び (join) を次のように定義する.

$$X * Y = \{ux - vy | x \in X, y \in Y, x \neq y, (u : v) \in \mathbf{P}^1\}$$

■

この多様体の結びの概念を用いて, $\mathbf{P}^3$ 上の捩れの位置にある 2 本の射影直線に対して, 次のような問題が考えられる.

Question.1

k を field としたとき, 捩れの位置にある 2 本の射影直線の結びは $\mathbf{P}^3$ に一致するか. 特に,

$$L_1 = \mathbf{Z}(x_2, x_3)$$

$$L_2 = \mathbf{Z}(x_0, x_1)$$

の結びは $\mathbf{P}^3$ に一致するか.

■

Question.1 は, 肯定的に解決できた. さらに, [C] の第 8 章 6 節にある射影同値の概念を用いることにより, より多くのことが分かった. 先ず, 射影同値の定義を [C] と同様にしておく.

Definition.2

$V_1 \subset \mathbf{P}^n$, $V_2 \subset \mathbf{P}^n$ を variety とする. $A \in GL(n+1, k)$ が存在して, $V_2 = A(V_1)$ となるとき, V_1 と V_2 は射影同値 (projective equivalent) という.

■

この射影同値を使うと, 次のことが分かった.

Proposition.1

k を field とし, $X \in \mathbf{P}^3$ と, $Y \in \mathbf{P}^3$ を variety とする. さらに, 射影直線 L_1 と L_2 を,

$$L_1 = \mathbf{Z}(x_2, x_3)$$

$$L_2 = \mathbf{Z}(x_0, x_1)$$

とする. このとき, $A(X) = L_1$, $A(Y) = L_2$ なる $A \in GL(4, k)$ が存在するならば, $X * Y = \mathbf{P}^3$ が成り立つ.

■

この事実をふまえて, $\mathbf{P}^n$ に対しても 2 つの多様体がどのようなときに結びが $\mathbf{P}^n$ となるのかを考えた.

Question.2

2 つの variety $X \in \mathbf{P}^n$, $Y \in \mathbf{P}^n$ が, それぞれ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) &\cong \mathbf{P}^i \\ \mathbf{Z}(x_0, x_1, \dots, x_i) &\cong \mathbf{P}^{n-(i+1)} \end{aligned}$$

と射影同値となるときに、2つの variety X, Y の結びが $\mathbf{P}^n$ に一致するか。

■

この Question.2 も肯定的であった。

Proposition.2

k を field とし、 $X \in \mathbf{P}^n, Y \in \mathbf{P}^n$ を variety とする。このとき、 $X \cap Y = \emptyset$ であり、 $A(X) \cong \mathbf{P}^i, A(Y) \cong \mathbf{P}^{n-(i+1)}$ なる $A \in GL(n+1, k)$ と $0 \leq i \leq n-1$ が存在するならば、 $X * Y = \mathbf{P}^n$ が成り立つ。

■

次に、グラスマン多様体への写像 ω について考えた。[C] の第 8 章 6 節の定理 1.1 では、次のようなことを主張していた。

Theorem

$\mathbf{P}^3$ の射影直線の相異なる 2 点、 $p = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3), q = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ に対して、 $\omega_3 : \{\mathbf{P}^3 \text{ 上の射影直線全体}\}$

$$\longrightarrow Z(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12}) \subset \mathbf{P}^3$$

を次のように定義する。

$$\omega_3 \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (z_{ij})_{0 \leq i < j \leq 3} := (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq 3}$$

このとき、 ω_3 は全単射である。また、

$$z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12} = 0$$

を、Plücker の関係式という。

■

$\mathbf{P}^n$ の場合を考える前に、先ず、 $\mathbf{P}^4$ の場合で考えた。 $\mathbf{P}^4$ 上の射影直線全体から、 $\mathbf{P}^9$ への写像 ω_4 を $\mathbf{P}^3$ の場合と同様に定義した。

Definition.3

$\mathbf{P}^4$ の射影直線の相異なる 2 点、 $p = (a_0 : a_1 : \dots : a_4), q = (b_0 : b_1 : \dots : b_4)$ に対して、 $\mathbf{P}^4$ の射影直線から、 $\mathbf{P}^9$ への写像

$$\omega_4 : \{\mathbf{P}^4 \text{ 上の射影直線全体}\}$$

$$\longrightarrow V_4 \subset \mathbf{P}^9$$

を次のように定義する。

$$\omega_4 \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_4 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_4 \end{pmatrix} = (z_{ij})_{0 \leq i < j \leq 4} := (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq 4}$$

■

このとき、

$$(z_{ij})_{0 \leq i < j \leq 3} = (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq 3}$$

に対しては、 P^3 の場合を考えると、 P^4 においても、Plücker の関係式

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

が成り立っている。そこで、

$$p_{01}p_{24} - p_{02}p_{14} + p_{04}p_{12} = 0$$

$$p_{01}p_{34} - p_{03}p_{14} + p_{04}p_{13} = 0$$

$$p_{02}p_{34} - p_{03}p_{24} + p_{04}p_{23} = 0$$

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

が成り立っていると考えられ、実際、成り立っている（*）実際に、 P^9 における Plücker の関係式が上記のものだけを確認するために、次の問題を考える。

Question.3

Difinition.3 において、

$$V_4 = \mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq 4)$$

としたとき、 ω_4 は全単射か。

この問題は、肯定的に解決した。

Proposition.3

Difinition.3 における、 P^4 の射影直線から、 P^9 への写像

$\omega_4 : \{P^4 \text{ 上の射影直線全体} \}$

$\longrightarrow \mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq 4) \subset P^9$

は全単射。

■

この事実に基づいて、 P^n の場合を考える。 ω_n を同様に定義する。

Difinition.4

P^n の射影直線の相異なる 2 点 $p = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$, $q = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$

に対して、 P^n の射影直線から、 $\binom{n+1}{2} - 1$ 次元射影空間への写像

$\omega_n : \{P^n \text{ 上の射影直線全体} \}$

$\longrightarrow V_n$

を次のように定義する。

$$\omega_n \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = (z_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} := (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq n}$$

P^4 の場合と同様の問題を考える。

Question.4

Difinition.4 において、

$$V_n = \mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$$

としたとき, ω_n は全単射か .

Proposition.3 と同様の結果が得られた .

Proposition.4

Difinition.4 における, $\mathbf{P}^n$ の射影直線から, $\binom{n+1}{2} - 1$ 次元射影空間

への写像

$\omega_n : \{\mathbf{P}^n \text{ 上の射影直線全体} \}$

$$\longrightarrow \mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$$

は全単射 .

■

したがって, $\{\mathbf{P}^n \text{ 上の射影直線全体} \}$ の ω_n による像は,

$$\mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$$

であることが判明した .

3 命題の証明

まず, 結びに関する, 命題から示す . **Proposition.1** は **Proposition.2** と同様に示せるので, **Proposition.2** を示す .

Proposition.2

k を field とし, $X \in \mathbf{P}^n, Y \in \mathbf{P}^n$ を variety とする . このとき, $X \cap Y = \emptyset$ であり, $A(X) \cong \mathbf{P}^i, A(Y) \cong \mathbf{P}^{n-(i+1)}$ なる $A \in GL(n+1, k)$ と $0 \leq i \leq n-1$ が存在するならば, $X * Y = \mathbf{P}^n$ が成り立つ .

Proof

$X * Y \subset \mathbf{P}^n$ は明らか . 逆である $\mathbf{P}^n \subset X * Y$ を示す . $X \cap Y = \emptyset$ より, $A(X) \cap A(Y) = \emptyset$ なので,

$$\begin{aligned} A(X) &= \mathbf{Z}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \cong \mathbf{P}^i \\ A(Y) &= \mathbf{Z}(x_0, x_1, \dots, x_i) \cong \mathbf{P}^{n-(i+1)} \end{aligned}$$

となるので, $\mathbf{Z}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) * \mathbf{Z}(x_0, x_1, \dots, x_i) = \mathbf{P}^n$ を示せばよい . これは, **Proposition.1** と同様に示せる . 先ず, $p \in A(X) \cup A(Y)$ のときは明らか . 次に, 任意の $p = (p_0 : p_1 : \dots : p_n) \in \mathbf{P}^n \setminus A(X) \cup A(Y)$ に対して, $(p_0 : p_1 : \dots : p_i) = t(q_0 : q_1 : \dots : q_i)$ を満たす, $t \in k, q = (q_0 : q_1 : \dots : q_i : 0 : \dots : 0) \in A(X)$ が存在する . この p と q を通る直線 L は,

$$L = \{(utq_0 - vq_0 : utq_1 - vq_1 : \dots : utq_i - vq_i : up_{i+1} : \dots : up_n) | (u : v) \in \mathbf{P}^1\}$$

したがって、 $A(Y)$ との交点は、 u, v に関する連立方程式

$$\begin{aligned} utq_0 - vq_0 &= 0 \\ &\vdots \\ utq_i - vq_i &= 0 \end{aligned}$$

を解けば求められる。これは、明らかに自明解以外の解 $(u : v) = (1 : t)$ を持つ。したがって、 L と $A(Y)$ との交点は必ず存在し、 $p \in A(X) * A(Y)$ が成り立つ。ゆえに、 $A(X) * A(Y) \subset \mathbf{P}^n$ なので、 $X * Y \subset \mathbf{P}^n$ が成り立つ。

■

次に、グラスマン多様体の写像に関する命題を示す。命題を示す前に、まず、 $(*)$ を示しておく。

Lemma

$$(p_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} = (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq n}$$

とする。任意の $0 \leq i < j < k < l \leq n$ に対して、

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk} = 0$$

が成り立つ。

Proof

定義に基づいて実際に計算する。

$$\begin{aligned} & p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk} \\ &= (a_i b_j - a_j b_i)(a_k b_l - a_l b_k) - (a_i b_k - a_k b_i)(a_j b_l - a_l b_j) \\ & \quad + (a_i b_l - a_l b_i)(a_j b_k - a_k b_j) \\ &= a_i b_j a_k b_l - a_i b_j a_l b_k - a_j b_i a_k b_l + a_j b_i a_l b_k \\ & \quad - a_i b_k a_j b_l + a_i b_k a_l b_j + a_k b_i a_j b_l - a_k b_i a_l b_j \\ & \quad + a_i b_l a_j b_k - a_i b_l a_k b_j - a_l b_i a_j b_k + a_l b_i a_k b_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

次に、命題を示すが、**Proposition.3** は **Proposition.4** と同様に示せるので、**Proposition.4** を示す。

Proposition.4

$\mathbf{P}^n$ の射影直線の相異なる 2 点 $p = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$, $q = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$

に対して、 $\mathbf{P}^n$ の射影直線から、 $\binom{n+1}{2} - 1$ 次元射影空間への写像

$\omega_n : \{\mathbf{P}^n \text{ 上の射影直線全体} \}$

$\longrightarrow \mathbf{Z}(z_{ij}z_{kl} - z_{ik}z_{jl} + z_{il}z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$

を次のように定義する。

$$\omega_n \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = (z_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} := (a_i b_j - a_j b_i)_{0 \leq i < j \leq n}$$

この ω_n は全単射 .

Proof

直線 L と L' をある零でない λ が存在して $\omega_n(L) = \lambda \omega_n(L')$ を満たすとする .
 L 上の任意の相異なる 2 点を $p := (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$, $q := (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$
とし , L' 上の任意の相異なる 2 点を $p' := (a'_0 : a'_1 : \cdots : a'_n)$,
 $q' := (b'_0 : b'_1 : \cdots : b'_n)$ とすると , 任意の $0 \leq i < j \leq n$ に対して , 次が成り立つ .

$$a_i b_j - a_j b_i = \lambda (a'_i b'_j - a'_j b'_i)$$

このとき , $a_i b_j - a_j b_i$ のいずれかは , 零でないので , P^n の座標を入れ替えることにより , $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$ としてよい . そこで , 次の 2 点 P, Q を考える .

$$\begin{aligned} P &= (0 : -(a_0 b_1 - a_1 b_0) : -(a_0 b_2 - a_2 b_0) : \cdots : -(a_0 b_n - a_n b_0)) \\ &= (0 : -\lambda(a'_0 b'_1 - a'_1 b'_0) : -\lambda(a'_0 b'_2 - a'_2 b'_0) : \cdots : -\lambda(a'_0 b'_n - a'_n b'_0)) \\ &= (0 : -(a'_0 b'_1 - a'_1 b'_0) : -(a'_0 b'_2 - a'_2 b'_0) : \cdots : -(a'_0 b'_n - a'_n b'_0)) \\ Q &= (a_0 b_1 - a_1 b_0 : 0 : -(a_1 b_2 - a_2 b_1) : -(a_1 b_3 - a_3 b_1) : \cdots : -(a_1 b_n - a_n b_1)) \\ &= (\lambda(a'_0 b'_1 - a'_1 b'_0) : 0 : -\lambda(a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1) : -\lambda(a'_1 b'_3 - a'_3 b'_1) : \cdots : -\lambda(a'_1 b'_n - a'_n b'_1)) \\ &= (a'_0 b'_1 - a'_1 b'_0 : 0 : -(a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1) : -(a'_1 b'_3 - a'_3 b'_1) : \cdots : -(a'_1 b'_n - a'_n b'_1)) \end{aligned}$$

このとき ,

$$\begin{aligned} P &= b_0 p - a_0 q = b'_0 p' - a'_0 q' \\ P &= b_1 p - a_1 q = b'_1 p' - a'_1 q' \end{aligned}$$

となるので , この 2 点 P, Q は , 両方とも , L, L' に含まれる . 射影直線は , 射影直線上の 2 点により決まるので , $L = L'$ が成り立ち , 単射が分かった .
 $(p_{01} : p_{02} : \cdots : p_{0n-1} : p_{0n}) \in Z(z_{ij} z_{kl} - z_{ik} z_{jl} + z_{il} z_{jk} | 0 \leq i < j < k < l \leq n)$ とする . このとき , p_{ij} のいずれかは , 零でないので , P^n の座標を入れ替えることにより , $p_{01} \neq 0$ としてよい . そこで , 次の 2 点を考える .

$$\begin{aligned} (0 : -p_{01} : -p_{02} : \cdots : -p_{0n}) \\ (p_{01} : 0 : -p_{12} : -p_{13} : \cdots : -p_{1n}) \end{aligned}$$

この 2 点により , 1 つの射影直線を定めることができる . このとき , ω_n の像は , 任意の $0 \leq i < j < k < l \leq n$ に対して ,

$$p_{ij} p_{kl} - p_{ik} p_{jl} + p_{il} p_{jk} = 0$$

であるので ,

$$p_{01} p_{ij} = p_{0i} p_{1j} - p_{0j} p_{1i}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
& \omega_n \begin{pmatrix} 0 & -p_{01} & -p_{02} & \cdots & -p_{0n} \\ p_{01} & 0 & -p_{12} & \cdots & -p_{1n} \end{pmatrix} \\
&= (p_{01}^2 : p_{01}p_{02} : p_{01}p_{03} : \cdots : p_{01}p_{0n} : p_{01}p_{12} : \cdots : p_{01}p_{1n} \\
&\quad : p_{02}p_{13} - p_{03}p_{12} : \cdots : p_{0i}p_{1j} - p_{0j}p_{1i} : \cdots : p_{0\ n-1}p_{1n} - p_{0n}p_{1\ n-1}) \\
&= (p_{01} : p_{02} : p_{03} : \cdots : p_{0n} : p_{12} : \cdots : p_{1n} : p_{23} : \cdots : p_{ij} : \cdots : p_{n-1\ n})
\end{aligned}$$

となり，全射が言えた．

■

4 謝辞

卒業論文作成にあたり，お忙しい中，たくさんの指導，指摘，意見をいただいた，楫先生や，楫研究室の皆様に，この場を借りて，お礼申し上げます．

5 参考文献

[C] : D.Cox J.Little D.O'Shea *Ideals, Varieties, and Algorithms*
 -An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra
 Springer-Verlag(1992)