

Hirzebruch 曲面の基本変換について

理工学部 数理科学科 1G05L003-1

石井 晋平

指導教員名 楫 元

概要

代数曲面の分類では有理曲面の典型例として, Hirzebruch 曲面 $\Sigma_b (b \geq 0)$ と, その間の双有理写像である 3 種類の基本変換がよく知られている. 私の卒業論文では, ある blowing up と blowing down の合成として定義される第 $I_{(+)}$ 種基本変換 $h_{I_{(+)}} : \Sigma_b \longrightarrow \Sigma_{b+1}$ について考察した. 具体的には, Σ_b からの有理写像を局所座標系を用いて書き下し, 像が Σ_{b+1} と同型になることを示すことで, $h_{I_{(+)}}$ の座標の対応を明らかにした.

1 動機

第 $I_{(+)}$ 種基本変換 $h_{I_{(+)}} : \Sigma_b \longrightarrow S$ において, $S \simeq \Sigma_{b+1}$ は交点数の理論を利用した証明で示される. ただし, S は Σ_b をある点で blowing up したのち, blowing down して得られる曲面である. 私は, blowing up と blowing down の合成で定義される $h_{I_{(+)}}$ の座標の対応を明らかにしたいと考え, 主定理を得ることができた.

2 定義

定義 1 $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1$ をそれぞれ複素射影平面, 複素射影直線とする. 整数 $b \geq 0$ に対して

$$\Sigma_b = \{(x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_1 y_1^b = x_2 y_0^b\}$$

と定め, Σ_b を b 次 Hirzebruch 曲面という.

注意 ここでは $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2, (y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1$ のとき, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ の元を $(x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1)$ と表すことにする.

命題 Σ_b は 4 枚の開被覆によって覆われた複素多様体である.

定義 2 ($P = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ における blowing up) $P = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ とする. $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ の部分集合として

$$\Gamma = \{(z, w, \zeta_0 : \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid z \zeta_1 = w \zeta_0\}$$

をとり, $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を第 1 成分への射影とする.

$x (\neq P) \in \mathbb{C}^2$ に対して, $\sigma^{-1}(x)$ は 1 点のみからなる. 一方, $\sigma^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$ となる.

この $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を $P \in \mathbb{C}^2$ における blowing up という.
 また, $E = \sigma^{-1}(P)$ と定め, E を例外因子という.

3 基本変換

Hirzebruch 曲面 Σ_b では, その間の双有理写像である基本変換が 3 種類定義される. そのひとつである第 $I_{(+)}$ 種基本変換について述べる.

$P_1 = (1 : 0 : 0, 1 : 0) \in \Sigma_b$ をとり, $\mu : \Sigma_b \longrightarrow W$ を $P_1 \in \Sigma_b$ での blowing up, $E_1 = \mu^{-1}(P_1)$ を例外因子とする.

P_1 の乗っているファイバーを F , F の固有変換を $\tilde{F}$ とする. $\tilde{F}$ を例外因子とみて 1 点 P'_1 につづし, 曲面 S を得ることができる. この操作を blowing down という.

$$\lambda : W \longrightarrow S \quad \lambda(\tilde{F}) = P'_1$$

交点数の理論によって, $S \simeq \Sigma_{b+1}$ となることが示せる.

定義 3 $h_{I_{(+)}} = \lambda \circ \mu^{-1} : \Sigma_b \longrightarrow S$ を第 $I_{(+)}$ 種基本変換という.

4 主定理

定理 1 Σ_b を b 次 Hirzebruch 曲面, $h_{I_{(+)}} : \Sigma_b \longrightarrow S$ を第 $I_{(+)}$ 種基本変換とすると, $S \simeq \Sigma_{b+1}$ となる.

注意 定理 1 は, 交点数による証明ではなく, 局所座標系の考察による別証明で示される.

定理 2 Σ_b を b 次 Hirzebruch 曲面, $h_{I_{(+)}}$ を第 $I_{(+)}$ 種基本変換とすると

$$\begin{aligned} h_{I_{(+)}} : \quad \Sigma_b &\longrightarrow \Sigma_{b+1} \\ (x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1) &\longmapsto (x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_2 y_1, y_0 : y_1) \end{aligned}$$

となる. ただし, $h_{I_{(+)}}$ は $P_1 = (1 : 0 : 0, 1 : 0)$ では定義できない有理写像である.

参考文献

- [I] 飯高 茂, 平面曲線の幾何, 共立出版 (2001)
- [Hor] 堀川 穎二, 複素代数幾何学入門, 岩波書店 (1990)
- [Har] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)
- [Bea] A.Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press (1996)