

Hirzebruch 曲面の基本変換について

理工学部 数理科学科

1G05L003-1

石井 晋平

指導教員名 楫 元

1 動機

知られていること

Σ_b : b 次 Hirzebruch 曲面, S : ある曲面 $\implies S \simeq \Sigma_{b+1}$

$h_{I_{(+)}} : \Sigma_b \longrightarrow S$: 第 $I_{(+)}$ 種基本変換 (交点数による証明)

目標

$$\begin{aligned} h_{I_{(+)}} : \quad \Sigma_b &\longrightarrow S \\ (x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1) &\longmapsto (? : ? : ?, ? : ?) \end{aligned}$$

2 定義

Hirzebruch 曲面

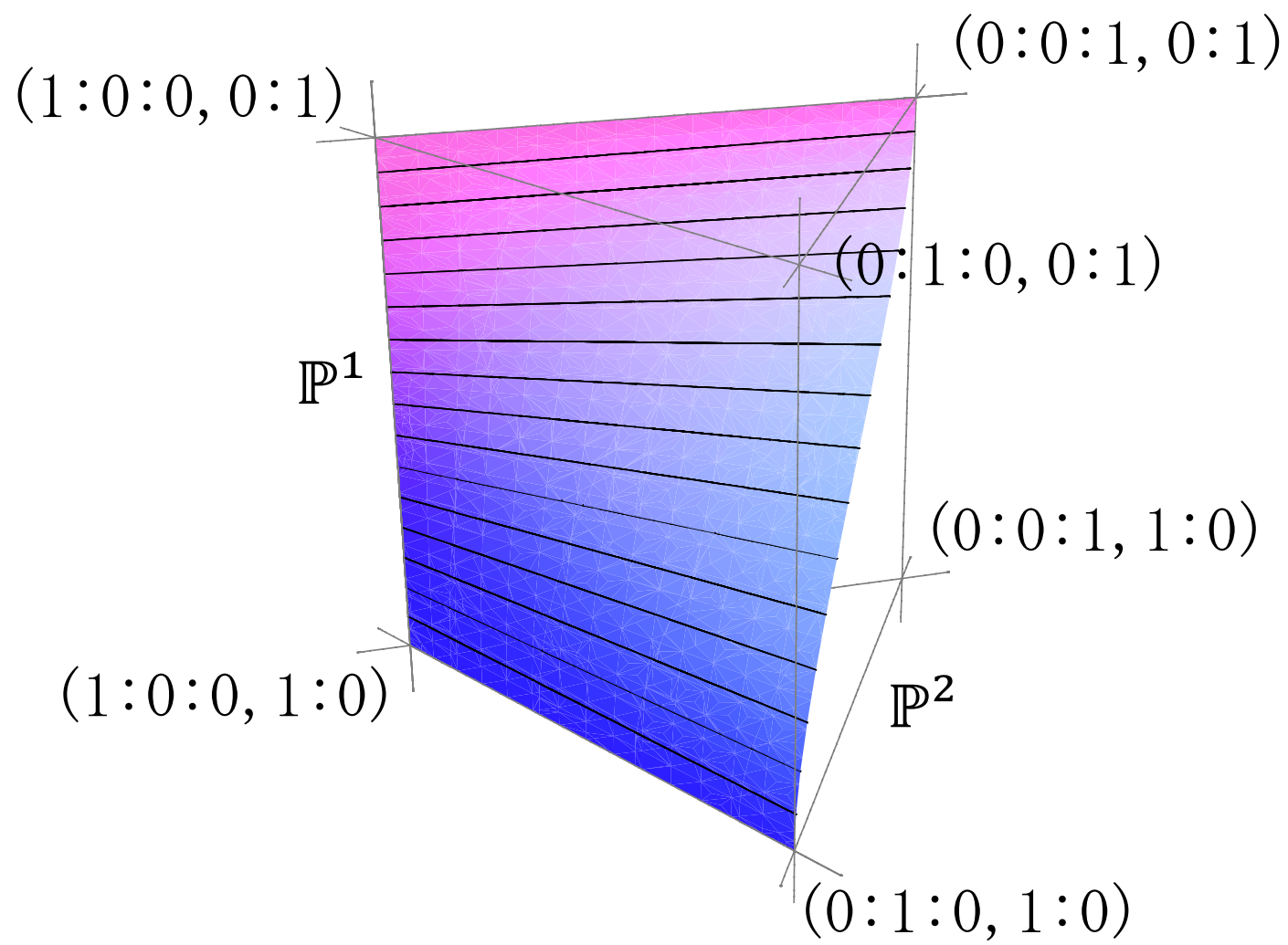
$\mathbb{P}^2$: 複素射影平面, $\mathbb{P}^1$: 複素射影直線, 整数 $b \geq 0$,

$$\Sigma_b = \{(x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_1 y_1^b = x_2 y_0^b\}$$

注意

$$(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2, (y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1 \implies (x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

と表すことにする.



2 定義

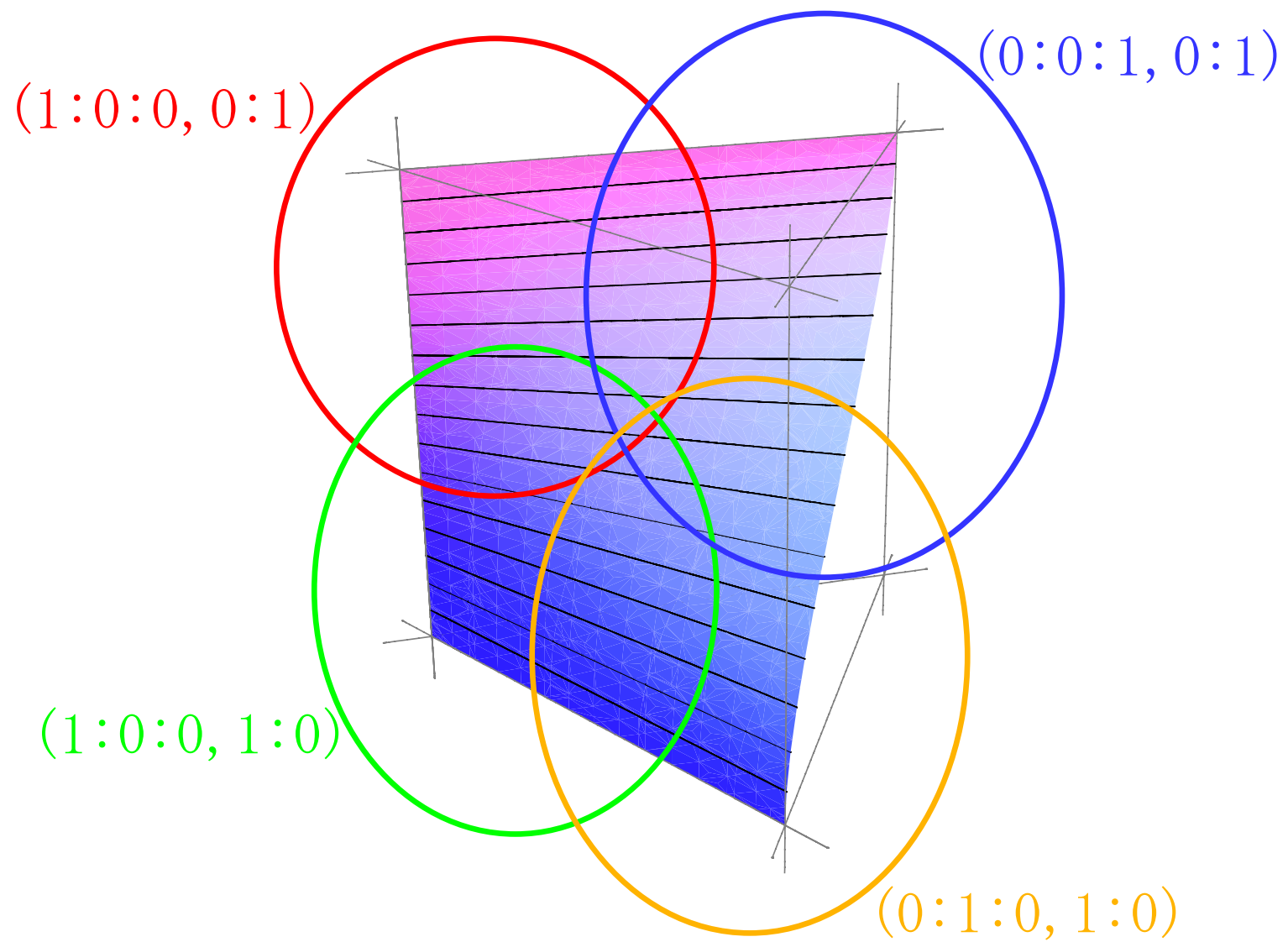
Hirzebruch 曲面

$\mathbb{P}^2$: 複素射影平面, $\mathbb{P}^1$: 複素射影直線, 整数 $b \geq 0$,

$$\Sigma_b = \{(x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_1 y_1^b = x_2 y_0^b\}$$



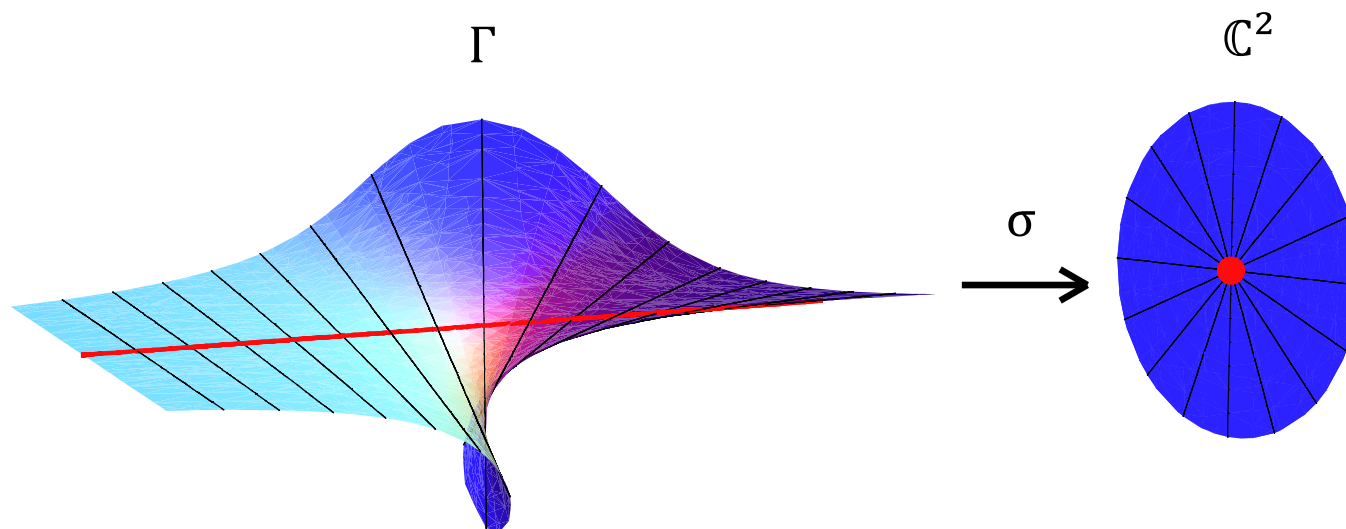
Σ_b は 4 枚の開被覆で覆われる複素多様体.



2 定義

blowing up

射影直線 $E \Leftarrow$ 点 P

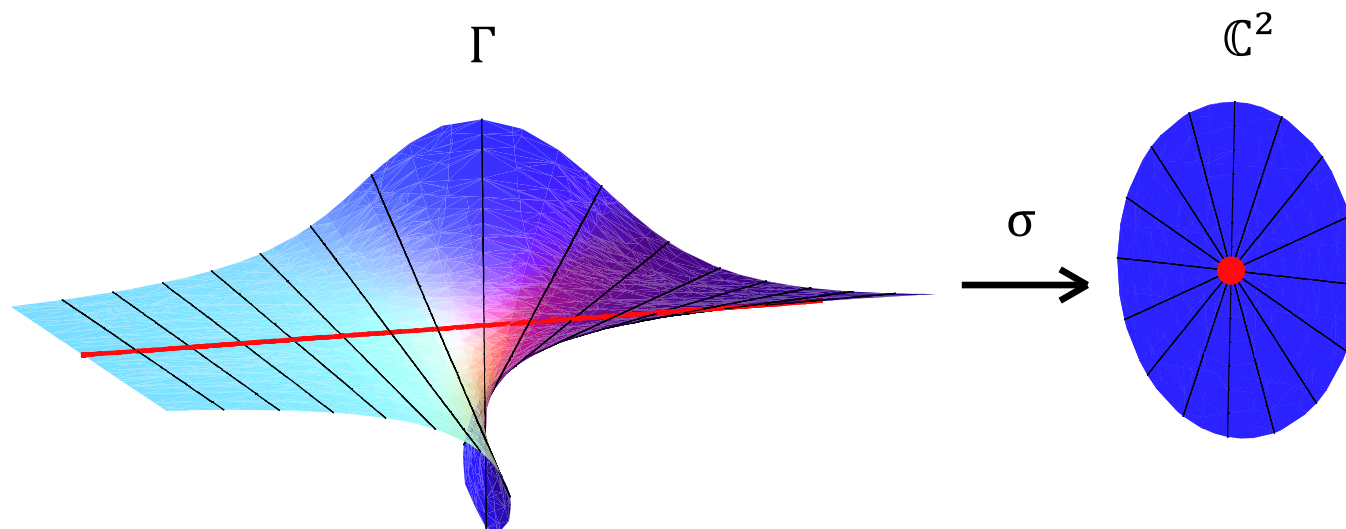


R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*. I, Figure 3.

2 定義

blowing down

射影直線 $E \implies$ 点 P



R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*. I, Figure 3.

3 基本変換

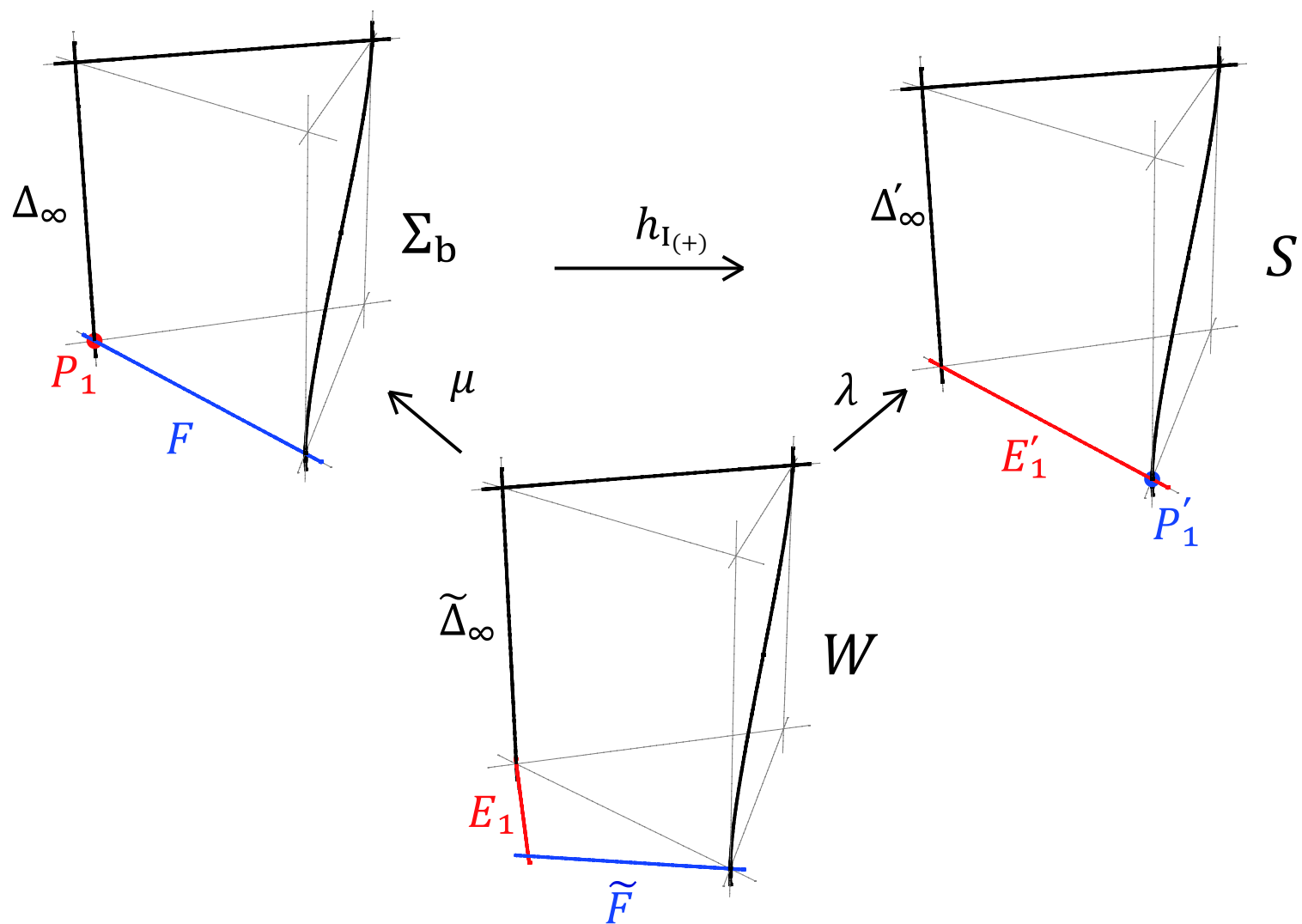
第 $I_{(+)}$ 種基本変換

$$\Sigma_b \xleftarrow{\mu} W \xrightarrow{\lambda} S$$

$\mu : W \longrightarrow \Sigma_b : P_1 = (1 : 0 : 0, 1 : 0) \in \Sigma_b$ における blowing up

$\lambda : W \longrightarrow S : \tilde{F} \subset W$ の blowing down

$\implies h_{I_{(+)}} = \lambda \circ \mu^{-1} : \Sigma_b \longrightarrow S : \text{第 } I_{(+)}\text{ 種基本変換}$



4 主定理

定理 1

Σ_b : b 次 Hirzebruch 曲面, $h_{I_{(+)}} : \Sigma_b \longrightarrow S$: 第 $I_{(+)}$ 種基本変換
 $\implies S \simeq \Sigma_{b+1}$ (局所座標系の考察により示せる.)

定理 2

Σ_b : b 次 Hirzebruch 曲面, $h_{I_{(+)}}$: 第 $I_{(+)}$ 種基本変換

$\implies h_{I_{(+)}} :$

Σ_b	$\longrightarrow$	Σ_{b+1}
$(x_0 : x_1 : x_2, y_0 : y_1)$	$\longmapsto$	$(x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_2 y_1, y_0 : y_1)$

5 主定理の略証

1. 局所座標系の変化の考察

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_b \cap U_x \simeq \mathbb{C}^2 & \text{局所座標 } (x, t) \\ \mu \quad \uparrow & \\ W \cap \tilde{U}_x = \{(x, t, z_0 : z_1) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xz_0 = tz_1\} & \end{array}$$

同様に他の開被覆, blowing down λ についても考察する.

ただし $x = \frac{x_1}{x_0}, t = \frac{y_1}{y_0}$ と定め, U_x は P_1 を中心とする開近傍

2. 定理 1 の証明

S の各開被覆の貼り合わせを考察すると, 次の補題より $S \simeq \Sigma_{b+1}$

補題

$$M \simeq \Sigma_b$$

M は 4 枚の $\mathbb{C}^2$ をある双正則写像で貼りあわせた多様体.

補題の続き

M は次のような貼り合わせ

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}_y^2 & \xrightarrow{\psi_{yz}} & \mathbb{C}_z^2 \\
 \psi_{xy} \uparrow & & \uparrow \psi_{uz} \\
 \mathbb{C}_x^2 & \xrightarrow{\psi_{xu}} & \mathbb{C}_u^2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{xy} : \quad \mathbb{C}_x^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_y^2 \\
 (x, t) &\longmapsto (y, s) = (xt^b, \frac{1}{t})
 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{uz} : \quad \mathbb{C}_u^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_z^2 \\
 (u, t) &\longmapsto (z, s) = (\frac{u}{t^b}, \frac{1}{t})
 \end{aligned}$$

3. 定理 2 の証明

Σ_{b+1} の座標を $(x'_0 : x'_1 : x'_2, y'_0 : y'_1)$ とすると,

$$x'_0 : x'_1 = z_0 : z_1 = t : x = x_0 y_1 : x_1 y_0$$

$$x'_0 : x'_2 = x_0 : x_2$$

$$y'_0 : y'_1 = y_0 : y_1$$

$$\implies (x'_0 : x'_1 : x'_2, y'_0 : y'_1) = (x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_2 y_1, y_0 : y_1)$$

参考文献

- [I] 飯高 茂, 平面曲線の幾何, 共立出版 (2001)
- [Hor] 堀川 穎二, 複素代数幾何学入門, 岩波書店 (1990)
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)
- [Bea] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press (1996)

M の貼り合わせ $\Rightarrow M \simeq \Sigma_b$

$$\begin{aligned}\psi_{xy} : \quad \mathbb{C}_x^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_y^2 \\ (x, t) &\longmapsto (y, s) = (xt^b, \frac{1}{t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{yz} : \quad \mathbb{C}_y^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_z^2 \\ (y, s) &\longmapsto (z, s) = (\frac{1}{y}, s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{xu} : \quad \mathbb{C}_x^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_u^2 \\ (x, t) &\longmapsto (u, t) = (\frac{1}{x}, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{uz} : \quad \mathbb{C}_u^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_z^2 \\ (u, t) &\longmapsto (z, s) = (\frac{u}{t^b}, \frac{1}{t})\end{aligned}$$

S の貼り合わせ $\Rightarrow M \simeq \Sigma_{b+1}$

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha y} : \quad \mathbb{C}_\alpha^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_y^2 \\ (\alpha, t) &\longmapsto (y, s) = (\alpha t^{b+1}, \frac{1}{t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{yz} : \quad \mathbb{C}_y^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_z^2 \\ (y, s) &\longmapsto (z, s) = (\frac{1}{y}, s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha\beta} : \quad \mathbb{C}_\alpha^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_\beta^2 \\ (\alpha, t) &\longmapsto (\beta, t) = (\frac{1}{\alpha}, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{\beta z} : \quad \mathbb{C}_\beta^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_z^2 \\ (\beta, t) &\longmapsto (z, s) = (\frac{\beta}{t^{b+1}}, \frac{1}{t})\end{aligned}$$

