有理写像の不確定点解消について
〜具体例における考察〜

楫研究室所属　小川達也

1　卒業論文の概要と問題提起

講究の授業の中で Cox, Little, O'Shea の本を扱っている際に, 不確定点が存在する有理写像の例が出てきた．その中で不確定点を除いた場合の考察は見ることができたが, 不確定点に関しては一切の記述がなかった．そこで私は不確定点を消すことが出来ないかということに強い興味を抱き, この例を使って調べることにした．次が私の卒業論文のテーマである．なお, 本発表会では基礎体は複素数体とする．

Question 1.1. $Q,\ W \subset \mathbb{A}^3$. $Q = V(x^2+y^2-z^2-1),\ W = V(x+1)$ とする．このとき

$$\begin{array}{rcl} \phi : Q & \dashrightarrow & W \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(-1, \dfrac{-2y}{x-1}, \dfrac{-2z}{x-1}\right) \\ \psi : W & \dashrightarrow & Q \\ (-1,a,b) & \longmapsto & \left(\dfrac{a^2-b^2-4}{a^2-b^2+4}, \dfrac{4a}{a^2-b^2+4}, \dfrac{4b}{a^2-b^2+4}\right) \end{array}$$

に, 何らかの操作を加えることにより不確定点でも写像を定義することができないか.

2　考察

まず, アフィン空間から射影空間に拡大して考えてみる．$W,\ Q \subset \mathbb{A}^3$ から得られた射影多様体を $\overline{W},\ \overline{Q} \subset \mathbb{P}^3$ と書くことにすると $\overline{Q} = V(x^2+y^2-z^2-w^2),\ \overline{W} = V(x+w)$ で与えられる．そして有理写像としては

$$\begin{array}{rcl} \overline{\phi} : \overline{Q} & \dashrightarrow & \overline{W} \\ (w:x:y:z) & \longmapsto & (x-w : -x+w : -2y : -2z) \\ \overline{\psi} : \overline{W} & \dashrightarrow & \overline{Q} \\ (c:-c:a:b) & \longmapsto & (a^2-b^2+4c^2 : a^2-b^2-4c^2 : 4ac : 4bc) \end{array}$$

で与えられる．しかし $Bs(\overline{\phi}) = \{(1:1:0:0)\},\ Bs(\overline{\psi}) = \{(0:0:1:\pm1)\}$ となり, 不確定点は存在する．

次にこれからの計算を簡単にするために座標変換をして次の有理写像で同一視して考える．
$Q' = V(xy - wz) \subset \mathbb{P}^3$ として

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Q' & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (w:x:y:z) & \longmapsto & (x:y:z) \\ \Psi : \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & Q' \\ (x:y:z) & \longmapsto & (xy:xz:yz:z^2) \end{array}$$

$Bs(\Phi) = \{(1:0:0:0)\},\ Bs(\Psi) = \{(1:0:0),(0:1:0)\}$ である．

次のアイデアとして, それぞれの不確定点で blow-up をしてみる

Definition 2.1 ($\mathbb{A}^2$ における原点の blow-up). $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \supset \widetilde{\mathbb{A}^2} := \{(x,y) \times (s:t) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 | tx - sy = 0\}$ をとり, $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ から $\mathbb{A}^2$ への射影を π とする．π が全射なのは明らか．$(x,y) \neq (0,0)$ ならば逆像は unique に点 $(x,y) \times (x:y)$ と定まる．また $\pi^{-1}((0,0)) = (0,0) \times \mathbb{P}^1$ となる．$E := (0,0) \times \mathbb{P}^1$ として E のことを**例外集合**と呼ぶ．$\pi(E) = (0,0)$ となる．即ち, $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ は $\mathbb{A}^2$ の原点を $\mathbb{P}^1$ と差し替えたものに他ならない．$\mathbb{A}^2$ から $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ を作る操作を $\mathbb{A}^2$ の原点における blow-up という．

Main Theorem 2.2 (卒業論文メインテーマの結果). Φ において Q' を $(1:0:0:0)$ において blow-up した多様体から $\mathbb{P}^2$ への有理写像, Ψ において $\mathbb{P}^2$ を $(1:0:0),(0:1:0)$ において blow-up した多様体から Q' への有理写像を見るとそれぞれの不確定点を解消することができる．
また, Q' を $(1:0:0:0)$ において blow-up した多様体と $\mathbb{P}^2$ を $(1:0:0),(0:1:0)$ において blow-up した多様体は同型になる．

参考文献

[1] David Cox, John Little, Donal O'Shea 著,『IDEALS, VARIETIES, AND ALGORITHMS』(Springer, 1996 年)

[2] 上野健爾 著,『代数幾何学入門』(岩波書店, 1994 年)

[3] 飯高茂, 上野健爾, 浪川幸彦 著,『入門｜現代の数学 [6] デカルトの精神と代数幾何』(日本評論社, 1979 年)