有理写像の不確定点解消について
～具体例における考察～

楫研究室所属　小川達也

Question1.1(**卒業論文のテーマ**).

$Q, W \subset \mathbb{A}^3$.

$Q = V(x^2 + y^2 - z^2 - 1), W = V(x+1)$

$$\begin{aligned} \phi : Q &\dashrightarrow W \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(-1, \frac{-2y}{x-1}, \frac{-2z}{x-1}\right) \\ \psi : W &\dashrightarrow Q \\ (-1, a, b) &\longmapsto \left(\frac{a^2 - b^2 - 4}{a^2 - b^2 + 4}, \frac{4a}{a^2 - b^2 + 4}, \frac{4b}{a^2 - b^2 + 4}\right) \end{aligned}$$

に, 何らかの操作を加ることにより不確定点でも写像を定義することができないか.

$\boxed{\text{手法 1}}$

まず, 無限遠点を処理するためにアフィン空間から射影空間に空間を拡張する.

$$\begin{aligned} \overline{Q} &: Q \text{ を斉次化して得られた射影多様体} \\ \overline{W} &: W \text{ を斉次化して得られた射影多様体} \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= V(x^2 + y^2 - z^2 - w^2) \subset \mathbb{P}^3 \\ \overline{W} &= V(x + w) \subset \mathbb{P}^3 \end{aligned}$$

となる.

$$\overline{Q} = V(x^2 + y^2 - z^2 - w^2), \overline{W} = V(x + w)$$

点の対応を見ると

$$\begin{aligned} \overline{\phi} : \overline{Q} & \dashrightarrow \overline{W} \\ (w : x : y : z) & \longmapsto (x - w : -x + w : -2y : -2z) \\ \overline{\psi} : \overline{W} & \dashrightarrow \overline{Q} \\ (c : -c : a : b) & \longmapsto (a^2 - b^2 + 4c^2 : a^2 - b^2 - 4c^2 : 4ac : 4bc) \end{aligned}$$

$$Bs(\overline{\phi}) = \{(1 : 1 : 0 : 0)\}, Bs(\overline{\psi}) = \{(0 : 0 : 1 : \pm 1)\}$$

次に座標変換をする.

$Q' = V(xy - wz) \subset \mathbb{P}^3$ として

$$\begin{array}{rcl} & \Phi : Q' \dashrightarrow \mathbb{P}^2 & \\ (w : x : y : z) & \longmapsto & (x : y : z) \\ & \Psi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q' & \\ (x : y : z) & \longmapsto & (xy : xz : yz : z^2) \end{array}$$

$$Bs(\Phi) = \{(1 : 0 : 0 : 0)\}, Bs(\Psi) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\}$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q} & \underset{\overline{\psi}}{\overset{\overline{\phi}}{\rightleftarrows}} & \overline{W} \\ \wr\| & & \wr\| \\ Q' & \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

$\boxed{\text{手法 } 2}$
不確定点において blow-up をする.

Definition2.1($\mathbb{A}^2$ **の原点における** blow-up).

$$
\begin{array}{ccl}
\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 & \supset & \widetilde{\mathbb{A}^2} := \{(x,y)\times(s:t) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 | tx - sy = 0\} \\
\downarrow & \swarrow \pi & \cup \\
\mathbb{A}^2 & & \pi^{-1}((0,0)) = (0,0)\times\mathbb{P}^1 =: E \\
\cup & \swarrow & \\
\{(0,0)\} & &
\end{array}
$$

$\mathbb{A}^2$ から $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ を作る操作を $\mathbb{A}^2$ の原点における blow-up という.

Main Theorem2.2(**卒業論文メインテーマの結果**).

$\alpha \in Q',\ \beta, \gamma \in \mathbb{P}^2$

$\alpha = (1:0:0:0), \quad \beta = (1:0:0), \quad \gamma = (0:1:0)$

$\widetilde{Q'} : Q'$を点αにおいてblow-upした多様体

$\widetilde{\mathbb{P}^2} : \mathbb{P}^2$を点$\beta, \gamma$においてblow-upした多様体

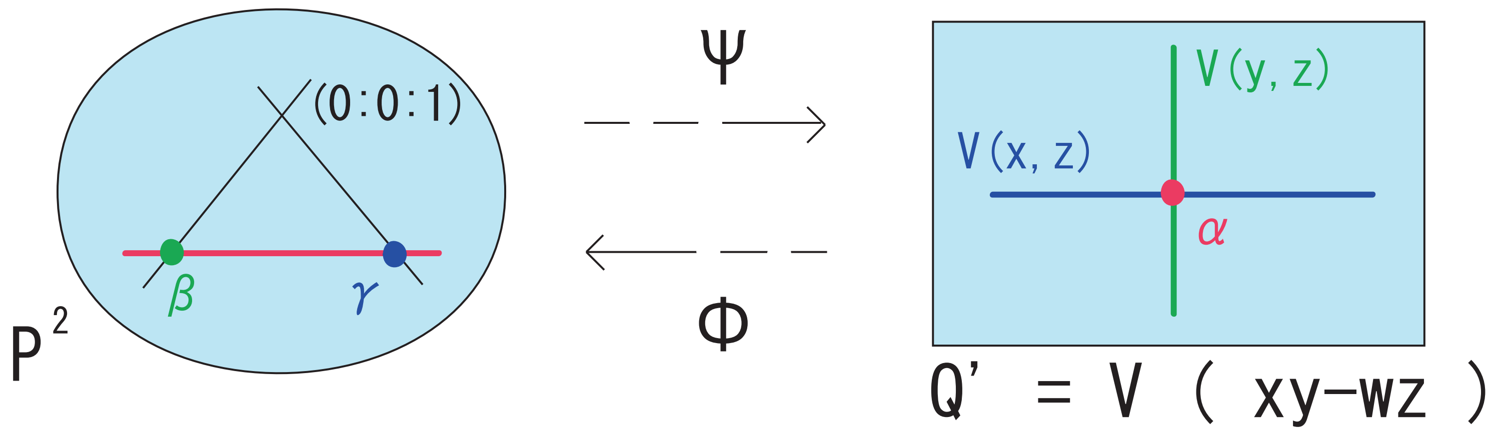
$\Phi' : \widetilde{Q'} - - \rightarrow \mathbb{P}^2$ (Φが誘導する有理写像)

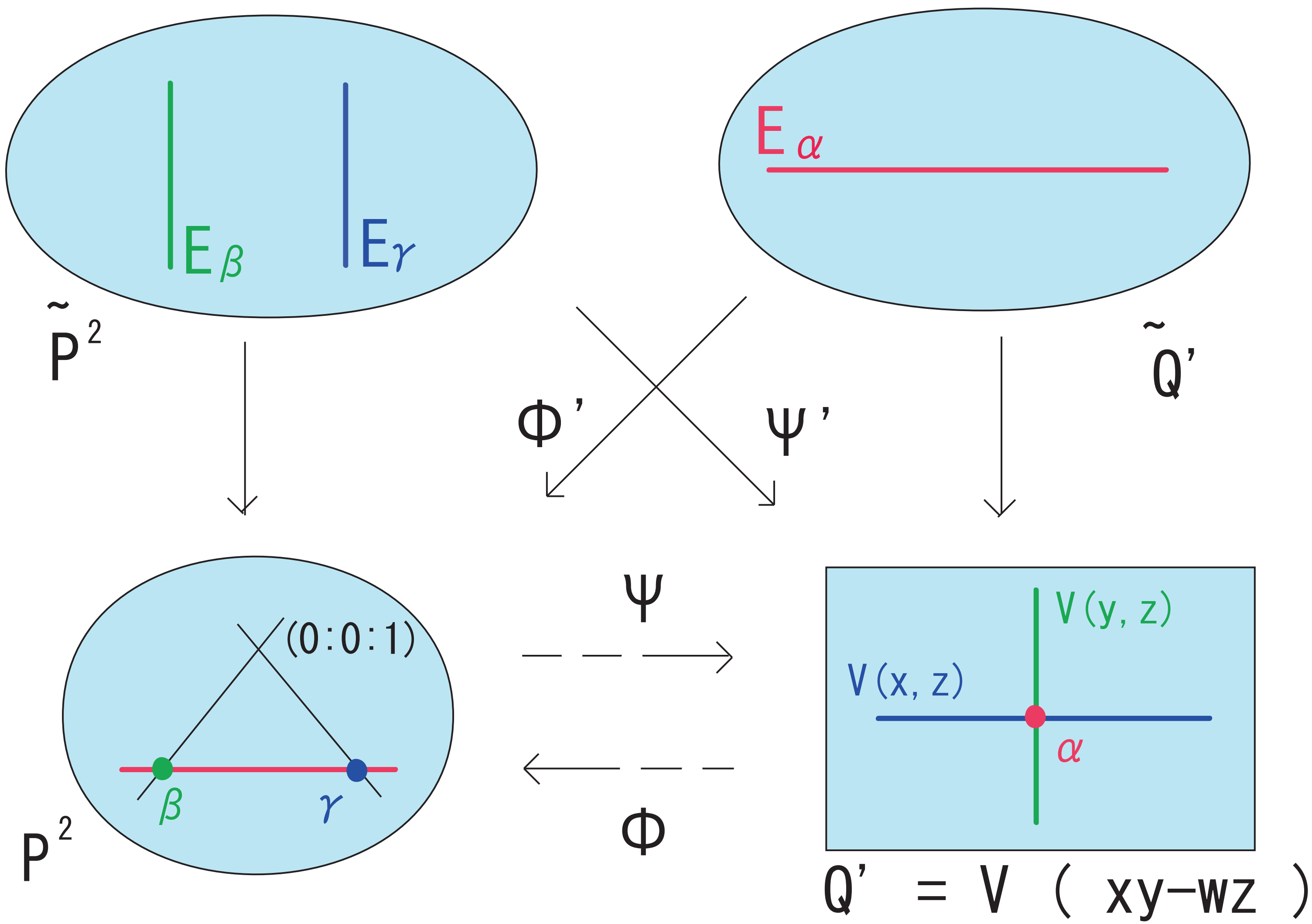
$\Psi' : \widetilde{\mathbb{P}^2} - - \rightarrow Q'$ (Ψが誘導する有理写像)

このとき

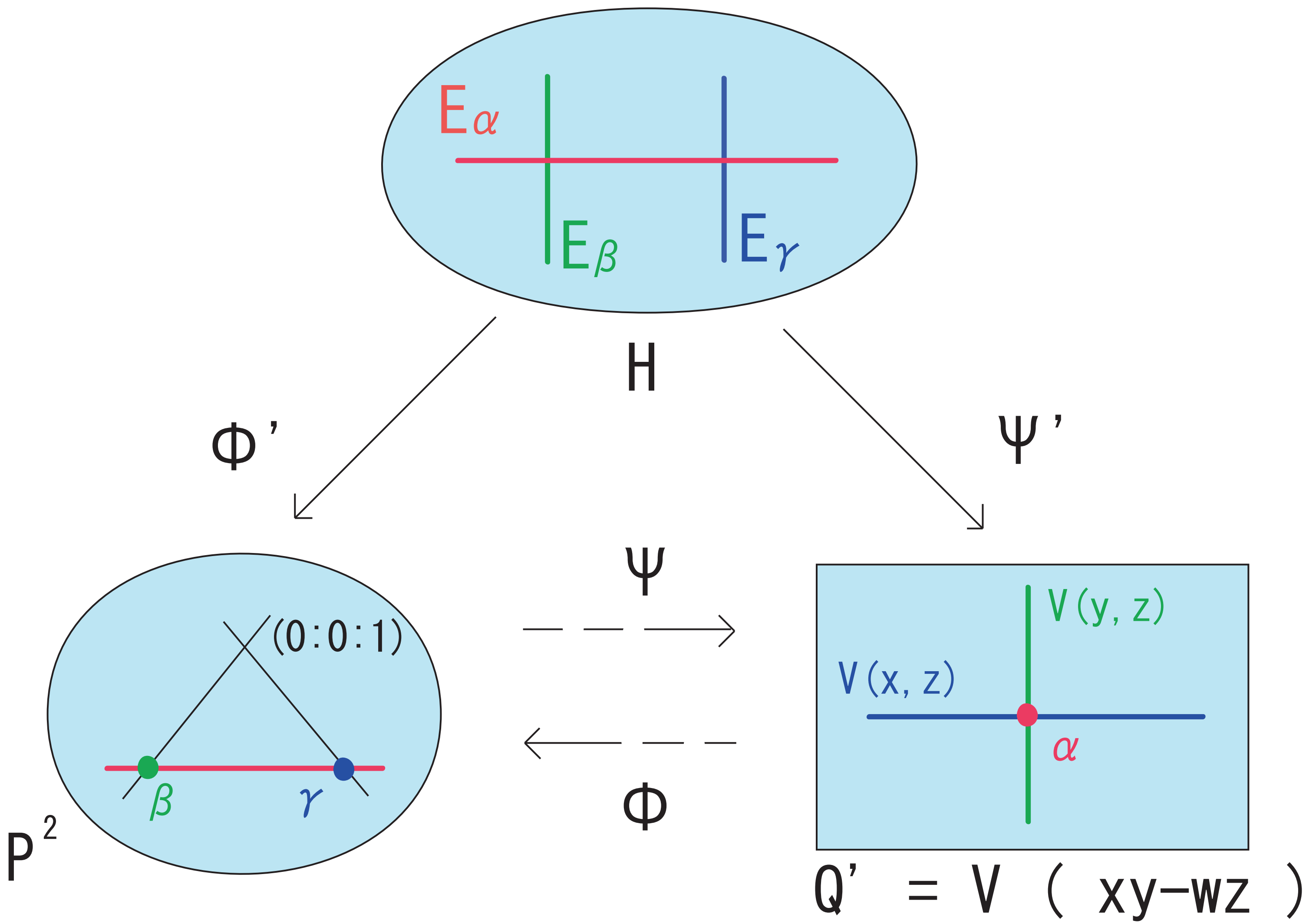
(1)$Bs(\Phi') = Bs(\Psi') = \emptyset$

(2)$\widetilde{Q'} \cong \widetilde{\mathbb{P}^2}$


(0:0:1)
β
γ
P 2
Ψ
Φ
V(y, z)
V(x, z)
α
Q' = V (xy−wz)



E_β
E_γ
$\tilde{P}^2$
E_α
$\tilde{Q}'$
Φ'
Ψ'
(0:0:1)
β
γ
P^2
Ψ
Φ
V(y, z)
V(x, z)
α
Q' = V (xy−wz)



Eα
Eβ
Eγ
H
Φ'
Ψ'
Ψ
Φ
(0:0:1)
β
γ
P²
V(y, z)
V(x, z)
α
Q' = V (xy−wz)

$$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5, \quad H_i \cong \mathbb{A}^2$$

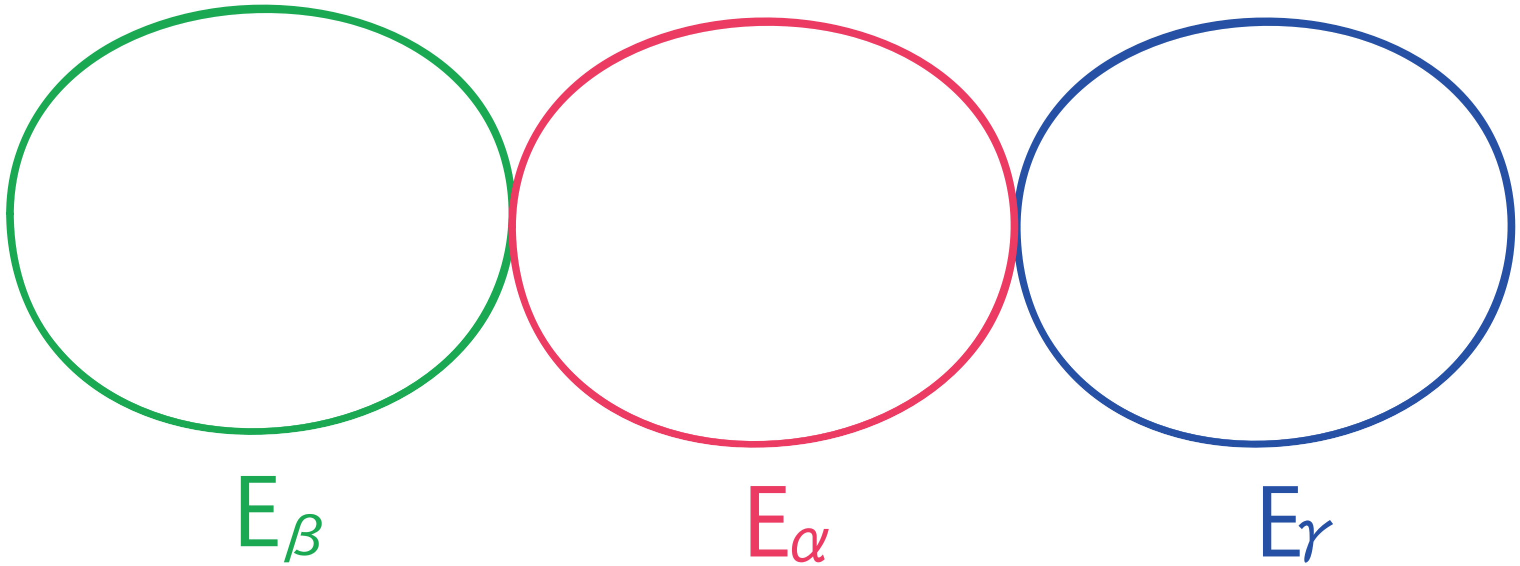
$$H_1 \ni (u_1, v_1) \longmapsto (1 : v_1 : u_1 v_1 : u_1 v_1^2) \in Q'$$
$$H_1 \ni (u_1, v_1) \longmapsto (1 : u_1 : u_1 v_1) \in \mathbb{P}^2$$

$$H_2 \ni (u_2, v_2) \longmapsto (1 : u_2 v_2 : v_2 : u_2 v_2^2) \in Q'$$
$$H_2 \ni (u_2, v_2) \longmapsto (u_2 : 1 : u_2 v_2) \in \mathbb{P}^2$$

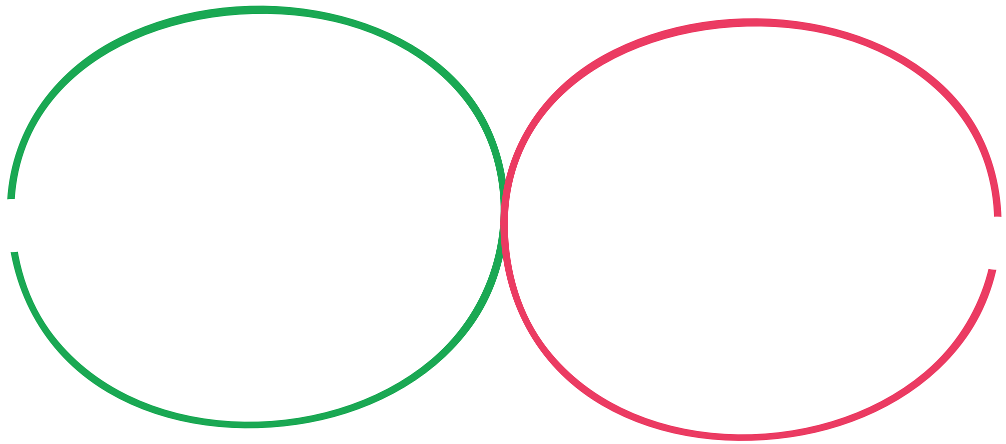
$$H_3 \ni (u_3, v_3) \longmapsto (v_3 : 1 : u_3 v_3 : u_3) \in Q'$$
$$H_3 \ni (u_3, v_3) \longmapsto (1 : u_3 v_3 : u_3) \in \mathbb{P}^2$$

$$H_4 \ni (u_4, v_4) \longmapsto (v_4 : u_4 v_4 : 1 : u_4) \in Q'$$
$$H_4 \ni (u_4, v_4) \longmapsto (u_4 v_4 : 1 : u_4) \in \mathbb{P}^2$$

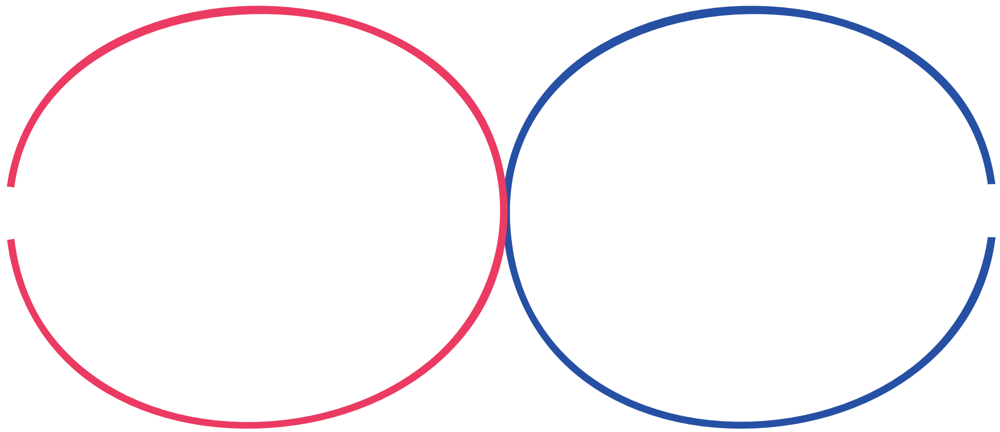
$$H_5 \ni (u_5, v_5) \longmapsto (u_5 v_5 : u_5 : v_5 : 1) \in Q'$$
$$H_5 \ni (u_5, v_5) \longmapsto (u_5 : v_5 : 1) \in \mathbb{P}^2$$


E_β
E_α
E_γ

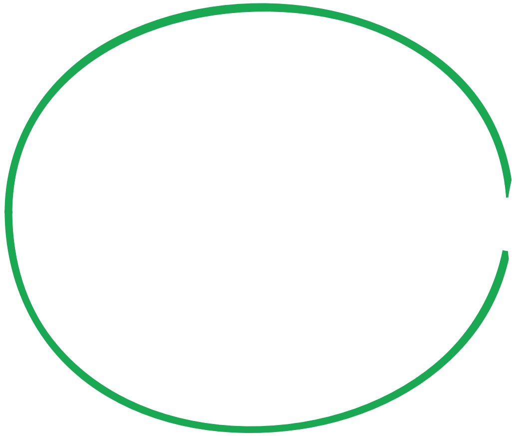
H_1 のカバーリング



H_2 のカバーリング



H_3 のカバーリング



H_4 のカバーリング