代数曲線上の特異点における重複度について

楫研究室学部 4 年
1G03L005-4 伊藤達哉

k:を固定した代数閉体とし, k 上の**アファイン n 空間** (affine n-space) を k の元 n 個の組すべてからなる集合と定義し, $\mathbf{A}^n$ と書く.

定義 1 (座標環とその局所環)
代数的集合 $Y \subset \mathbf{A}^n$ の**座標環**とは, $A(Y) := k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$ のこと.
但し $I(Y) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall P \in Y, f(P) = 0\}$.
$P \in Y$ に対し $\mathfrak{m}_P := \{f \in A(Y) \mid f(P) = 0\}$ とおくと, $A(Y)$ の極大イデアルをなし, $A(Y)$ の $\mathfrak{m}_P$ による局所化を Y の座標環の点 P における**局所環**といい, $\mathcal{O}_{Y,P}$ と書く.

定義 2 (Samuel 関数と重複度)
$(A, \mathfrak{m})$:d 次元ネーター局所環とする, 但し環とは単位的な可換環である.
この時, **Samuel 関数**を以下で定義する.

$$\chi(n) := l_A(A/\mathfrak{m}^{n+1}).$$

すると, 十分大きい n に対しては, 以下のような n についての d 次多項式で表せる [松村].

$$\chi(n) = \frac{e(A)}{d!} n^d + (n \text{ についての低次項}) \qquad (e(A) \in \mathbf{Z}).$$

この $e(A)$ を局所環 A の**重複度** (multiplicity) という.

定義 3 (代数曲線の曲線上の点における重複度)
代数曲線 C 上の点 P における C の**重複度** $\mu_P(C)$ を

$$\mu_P(C) := e(\mathcal{O}_{C,P}).$$

と定義する.

定理 1 (平面曲線の重複度)
$\mathbf{A}^2$ 内の曲線 $C : F(x, y) = 0$, $P : C$ の点 (P は原点に線形変換しておく).
このとき $F = F_r + F_{r+1} + \cdots + F_d$ ($F_r \neq 0$) と書くと,

$$\mu_P(C) = r$$

が成り立つ.

定理 2

$\mathbf{A}^3$ 内の曲線 $C: F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0,\ P: C$ の点 (P は原点に線形変換しておく). そして $F,\ G$ のそれぞれ斉次分解した最低次の次数を $r,\ s$ と書く.
このとき $F,\ G$ を最低次の項が共通因子を持たないならば,

$$\mu_P(C)=rs$$

が成り立つ.

定理 3 (主定理)

$\mathbf{A}^3$ 内の曲線 $C: F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0,\ P: C$ の点 (P は原点に線形変換しておく).
このとき $F,\ G$ を斉次分解し, その最低次の項の共通因子 h とする. ここで $F,\ G$ を以下のように書きなおす.

$$\begin{cases} F=hf_r^*+f,\ G=hg_s^*+g. \\ \deg h=m,\ \deg f_r^*=r,\ \deg g_s^*=s. \\ f,\ g \text{ を斉次分解した最低次の項の次数 } t,\ u \text{ が, } s+t\leq r+u. \end{cases}$$

このとき h と $g_s^*f_t-f_r^*g_{t+s-r}$ が共通因子を持たないならば,

$$\mu_P(C)=ms+rs+mt$$

が成り立つ.

例 1 ($F=xz-y^3,\ G=yz-x^3$ で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の曲線)

定理を使えば原点における重複度は, $1+1+3$ で 5 となることが分かる.
一方, $(xz-y^3, yz-x^3)$ を準素分解すると,

$$(xz-y^3,yz-x^3)=(x,y)\cap(y-x,z-x^2)\cap(y+x,z+x^2)\cap(y-ix,z-ix^2)\cap(y+ix,z+ix^2).$$

となり, 5 本の非特異曲線が現れることがわかる.

例 2 ($F=xy-z^3,\ G=x^2-y^3$ で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の曲線)

$(xy-z^3,x^2-y^3)$ は $\mathbb{C}$ 上の素イデアルである. なので例 1 のように準素分解では重複度は求める事が出来ないが, 定理を使えば原点における重複度が $1+1+3$ で 5 となることが直ちに分かる.

参考文献

[松村] 松村 英之 , 「可換環論」, 共立出版 (1980).
[Ful] W. Fulton , *Algebraic Curves* , New York : Benjamin (1969).
[Har] R. Hartshorne , *Algebraic Geometry* , New York : Springer-Verlag (1977).