

代数曲線上の特異点における 重複度について

楫研究室 学部 4 年
1G03L005-4 伊藤達哉

k :を固定した代数閉体とする.

定義 1 (座標環とその局所環)

代数的集合 $Y \subset \mathbf{A}^n$ の座標環とは, $A(Y) := k[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ のこと.

但し $I(Y) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \forall P \in Y, f(P) = 0\}$.

$P \in Y$ に対し $\mathfrak{m}_P := \{f \in A(Y) \mid f(P) = 0\}$ とおくと, $A(Y)$ の極大イデアルをなし, $A(Y)$ の $\mathfrak{m}_P$ による局所化を Y の座標環の点 P における局所環といい, $\mathcal{O}_{Y,P}$ と書く.

定義 2 (Samuel 関数と重複度)

$(A, \mathfrak{m})$: d 次元ネーター局所環とする, 但し環とは単位的な可換環である.
この時, Samuel 関数を以下で定義する.

$$\chi(n) := l_A(A/\mathfrak{m}^{n+1}).$$

すると, 十分大きい n に対しては, 以下のような n についての d 次多項式で表せる [松村].

$$\chi(n) = \frac{e(A)}{d!} n^d + (n \text{ についての低次項}) \quad (e(A) \in \mathbf{Z}).$$

この $e(A)$ を局所環 A の重複度 (multiplicity) という.

定義 3 (代数曲線の曲線上の点における重複度)

代数曲線 C 上の点 P における C の重複度 $\mu_P(C)$ を

$$\mu_P(C) := e(\mathcal{O}_{C,P}).$$

と定義する.

定理 1 (平面曲線の重複度)

$\mathbb{A}^2$ 内の曲線 $C : F(x, y) = 0$.

$P : C$ の点 (P は原点に線形変換しておく).

このとき $F = F_r + F_{r+1} + \cdots + F_d$ ($F_r \neq 0$) と書くと,

$$\mu_P(C) = r$$

が成り立つ.

定理 2

$\mathbf{A}^3$ 内の曲線 $C : F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$.

$P : C$ の点 (P は原点に線形変換しておく).

そして F, G のそれぞれ斉次分解した最低次の次数を r, s と書く.

このとき F, G を最低次の項が共通因子を持たないならば,

$$\mu_P(C) = rs$$

が成り立つ.

定理 3 (主定理)

$\mathbf{A}^3$ 内の曲線 $C : F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$.

$P : C$ の点 (P は原点に線形変換しておく).

このとき F, G を斉次分解し, その最低次の項の共通因子 h とする.

ここで F, G を以下のように書きなおす.

$$\left\{ \begin{array}{l} F = hf_r^* + f, \quad G = hg_s^* + g. \\ \deg h = m, \quad \deg f_r^* = r, \quad \deg g_s^* = s. \\ f, g \text{ を斉次分解した最低次の項の次数 } t, u \text{ が, } s + t \leq r + u. \end{array} \right.$$

このとき h と $g_s^* f_t - f_r^* g_{t+s-r}$ が共通因子を持たないならば,

$$\mu_P(C) = ms + rs + mt$$

が成り立つ.

例 1 ($F = xz - y^3$, $G = yz - x^3$ で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の曲線)

定理を使えば原点における重複度は, $1 + 1 + 3$ で 5 となることが分かる.

一方, $(xz - y^3, yz - x^3)$ を準素分解すると,

$$(x, y) \cap (y - x, z - x^2) \cap (y + x, z + x^2) \cap (y - ix, z - ix^2) \cap (y + ix, z + ix^2).$$

となり, 5 本の非特異曲線が現れることがわかる.

例 2 ($F = xy - z^3$, $G = x^2 - y^3$ で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の曲線)

$(xy - z^3, x^2 - y^3)$ は $\mathbb{C}$ 上の素イデアルである. なので例 1 のように準素分解では重複度は求める事が出来ないが, 定理を使えば原点における重複度が $1 + 1 + 3$ で 5 となることが直ちに分かる.

参考文献

[松村] 松村 英之 , 「可換環論」, 共立出版 (1980).

[Ful] W. Fulton , *Algebraic Curves* , New York : Benjamin (1969).

[Har] R. Hartshorne , *Algebraic Geometry* , New York : Springer-Verlag (1977).

$$R = k[x, y, z], I = (x, y, z).$$

$$\text{Step1: } l_{\mathcal{O}_{C,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/I_{\mathfrak{m}_P}^{n+1}) = \dim_k(\mathcal{O}_{C,P}/I_{\mathfrak{m}_P}^{n+1}).$$

$$\text{Step2: } \mathcal{O}_{C,P}/I_{\mathfrak{m}_P}^{n+1} \cong R/(I^n + (F, G)) \quad (k:\text{代数閉体を使う}).$$

Step3: 次の k 加群としての系列を考え, 完全性を示す.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R/I^{n-m-s-t} \times R/I^{n-m-r-s} \\ &\xrightarrow{\psi} R/I^{n-s-t} \times R/I^{n-m-r} \times R/I^{n-m-s} \\ &\xrightarrow{\phi} R/I^n \xrightarrow{\pi} R/(I^n + (F, G)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\psi : (A, B) \mapsto (hA + B, gA - g_s^* B, -fA + f_r^* B),$$

$$\phi : (A, B, C) \mapsto (g_s^* f - f_r^* g)A + FB + GC,$$

π は自然全射.