

ある種の尖点平面有理曲線のピカル多様体について

古川 勝久 (楫研)

平成 16 年 2 月 9 日

Definition. scheme X について

$$\mathrm{Pic}X := \{\text{invertible sheaf on } X\} / \text{isom}, \quad \mathrm{Pic}^0 X := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}X \mid \deg \mathcal{L} = 0\},$$

と定義する.

議論の入口としてつぎを見る.

Fact. C は nonsingular complete curve とする. $\mathrm{Pic}^0 C$ は abelian variety となり, その次元は C の genus に等しい.

Fact では nonsingular の条件のもとで考えているが, それでは, singular curve の picard variety については何かわからないのだろうか. Example をひとつ見てみよう.

以下, k は algebraically closed field, $\mathrm{char} k = 0$ とする.

Example (cuspidal cubic curve). $C: x^3 = y^2 z$ in $\mathbb{P}_k^2$ について $\mathrm{Pic}^0 C \cong \mathbf{G}_a := (k, +)$ である.

ここでの picard variety は, abelian variety にこそならないが, $\mathbf{G}_a$ という簡単な構造をもち, その次元は arithmetic genus に一致している.

これを足掛かりとして思索した結果, Example の一般化である次の Theorem が得られた.

Theorem. $C: x^l = y^m z^n$ in $\mathbb{P}_k^2$, $l = m + n$, $l > m > n > 0$, $(l, m) = 1$,

$$\implies \mathrm{Pic}^0 C \cong \mathbf{G}_a^{p_a(C)}.$$

うえて p_a は arithmetic genus. $\tilde{C} = \mathbb{P}^1$ (normalization) である. また $P := (0 : 0 : 1), Q := (0 : 1 : 0)$ と定義. C は $n = 1$ なら $P, n > 1$ なら P および Q において cuspidal point をもつ.

Proof of theorem. singular curve についての一般論から

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_P^\times / \mathcal{O}_P^\times \oplus \tilde{\mathcal{O}}_Q^\times / \mathcal{O}_Q^\times \longrightarrow \mathrm{Pic}C \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\tilde{C} \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}),$$

である. ゆえに $\mathrm{Pic}^0 C = \tilde{\mathcal{O}}_P^\times / \mathcal{O}_P^\times \oplus \tilde{\mathcal{O}}_Q^\times / \mathcal{O}_Q^\times$. ここで

$$\tilde{\mathcal{O}}_P^\times / \mathcal{O}_P^\times \cong k[T]_{(T)}^\times / k[T^m, T^l]_{(T^m, T^l)}^\times \cong k[[T]]^\times / k[[T^m, T^l]]^\times,$$

となる. 二番目の同型は completion についての議論による.

右辺の計算の爲つぎが必要である.

Proposition. $\{i_1 < i_2 < \cdots < i_M\} = \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus (l \cdot \mathbb{Z}_{\geq 0} + m \cdot \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とさだめるとき

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_a^M &\xrightarrow{\sim} k[[T]]^\times / k[[T^m, T^l]]^\times \\ \{a_1, a_2, \dots, a_M\} &\longmapsto \exp(a_1 T^{i_1}) \exp(a_2 T^{i_2}) \cdots \exp(a_M T^{i_M}), \end{aligned}$$

であり, $M = \frac{lm-l-m+1}{2}$ となる.

Q についても同様に議論. まとめて

$$\mathrm{Pic}^0 C \cong \mathbf{G}_a^{\frac{lm-l-m+1}{2}} \oplus \mathbf{G}_a^{\frac{ln-l-n+1}{2}} = \mathbf{G}_a^{\frac{(l-1)(l-2)}{2}} = \mathbf{G}_a^{p_a(C)},$$

となる. これにより Theorem は証明された. □

Remark. なお Proposition は $\mathrm{char} k > i_M$ の条件のもとでも成立する. ゆえに

$$\mathrm{char} k > \max\{i_M(P) \mid P \in \mathrm{Sing} C\},$$

であるときも Theorem はなりたつ.