ある種の尖点平面有理曲線のピカール多様体について

古川 勝久 (楫研)

平成 16 年 2 月 2 日

1 概要

曲線 C の picard variety $\mathrm{Pic}^0 C$ を考えよう.

C を nonsingular complete curve とすれば, $\mathrm{Pic}^0 C$ は abelian variety となって, その次元は C の genus に一致することが事実として知られている.

singular curve の picard variety については, どのような事がわかるのだろうか.

cuspidal cubic curve C: $x^3 = y^2 z$ in $\mathbb{P}^2_k$ のばあいには $\mathrm{Pic}^0 C \cong \mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ となる. このときの picard variety は abelian variety にこそなってはいないが, $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ なる簡単なものによって表現され, その次元は C の aritemetic genus に一致している.

本論文は, この一般化であるところの次の Theorem に證明をあたえるものである.

Theorem. *(5.1) cuspidal plane rational curve* $C : x^l = y^m z^n$ *in* $\mathbb{P}^2_k$, $l = m + n$, $l > m > n > 0$, $(l, m) = 1$, *k: algebraically closed field,* $\mathrm{char}\, k = 0$, とするとき

$$\mathrm{Pic}^0 C \cong \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{p_a(C)}.$$

なる同型を得る.

なお, 二節以降においては $\mathrm{char}\, k > 0$ のばあいについても考察する.

以下, 二節では C の基本的な性質について調べる. 三節では completion に関する議論をおこなう. 四節は formal power series についての結果であり, Theorem をしめすうえで本質的役割をはたすことになる. 最後に, 五節において Theorem の證明を完成させることになるだろう.

2 C: $x^l = y^m z^n$

C: $x^l = y^m z^n$ in $\mathbb{P}^2_k$, k: field, $l = m + n$, $l > m > n > 0$, $(l, m) = 1$ のようにさだめる. まづ, つぎのことがわかる.

Proposition 2.1. *normalization* $\tilde{C} = \mathbb{P}^1$

はじめに, lemma を用意する.

Lemma 2.2. $(l, n) = 1$.

Proof. $1 = al + bm = al + b(l - n) = (a + b)l - bn$. □

Lemma 2.3. $k[X, Y]/(X^l - Y^m) \hookrightarrow k[T]$, $X \mapsto T^m, Y \mapsto T^l$ をえる. とくに, 左辺の *integral closure* は右辺となる.

Proof. $k[X,Y]/(X^l-Y^m)$ の元は, $f(X,Y)=f_0(X)+f_1(X)\,Y+\cdots+f_{m-1}(X)\,Y^{m-1}$ なるかたちにとれる．さて,

$$f(T^m,T^l)=f_0(T^m)+f_1(T^m)\,T^l+\cdots+f_{m-1}(T^m)\,T^{l(m-1)}=0$$

としよう．このとき, それぞれの項にあらわれる degree は,

$$km, km+l, \ldots, km+l(m-1) \qquad (k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$$

のかたちである．$(l,m)=1$ であるから, これらは異なるもの．ゆえに $f_i(T^m)\,T^{li}=0$ であり $f_i=0$. したがって, $f=0$ とわかる． □

それでは, proposition をしめそう．

Proof of (2.1). $\mathbb{P}^1=\operatorname{Proj}(k[t,u])$ としよう．

$$\mathbb{P}^1=D_+(t)\cup D_+(u),\ C=D_+(y)\cup D_+(z)$$

である．$\mathbb{P}^1\to C$ をつぎで定める．

$D_+(u)\to D_+(z)$:

$$k\left[\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right]\Big/\left(\frac{x}{z}\right)^l-\left(\frac{y}{z}\right)^m\hookrightarrow k\left[\frac{t}{u}\right],\ \frac{x}{z}\mapsto\left(\frac{t}{u}\right)^m,\ \frac{y}{z}\mapsto\left(\frac{t}{u}\right)^l. \tag{1}$$

$D_+(t)\to D_+(y)$:

$$k\left[\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right]\Big/\left(\frac{x}{y}\right)^l-\left(\frac{z}{y}\right)^n\hookrightarrow k\left[\frac{u}{t}\right],\ \frac{x}{y}\mapsto\left(\frac{u}{t}\right)^n,\ \frac{z}{y}\mapsto\left(\frac{u}{t}\right)^l. \tag{2}$$

$D_+(tu)\xrightarrow{\sim} D_+(yz)$:

$$\left(k\left[\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right]\Big/\left(\frac{x}{z}\right)^l-\left(\frac{y}{z}\right)^m\right)_{\frac{y}{z}}\xrightarrow{\sim} k\left[\frac{t}{u}\right]_{\frac{t}{u}},\ \frac{x}{z}\mapsto\left(\frac{t}{u}\right)^m,\ \frac{y}{z}\mapsto\left(\frac{t}{u}\right)^l. \tag{3}$$

(1),(2) の対応は, (2.3) によるもの．

(3) の同型をみる．$m,2m,\ldots,(l-1)m$ のいづれかは $al+1$ のかたちになるから, $\exists b\geqslant 0,\ bm-al=1$ をえる．ゆえ, $\left(\frac{x}{z}\right)^b\left(\frac{y}{z}\right)^{-a}\mapsto\left(\frac{t}{u}\right)^{bm}\left(\frac{t}{u}\right)^{-al}=\frac{t}{u}$, であるから surj とわかる．

これらのはりあわせにより, normalization をえる． □

Corollary 2.4. *$P=(0:0:1),\ Q=(0:1:0)$ と定めると, $n=1$ なら $\operatorname{Sing}C=\{P\}$, $n>1$ なら $\operatorname{Sing}C=\{P,Q\}$ となる．*

Proof. $n=1$ のとき, (2),(3) は同型となる．すなわち, $D_+(y)$, $D_+(yz)$ は nonsingular. 一方 (1) について, $\frac{t}{u}$ はけっして左辺にふくまれないから, surj とならない．ゆえ $D_+(z)$ は singular point をもつ．したがって, $P=D_+(z)\setminus D_+(yx)$ のみが singular point となる．

$n>1$ のときも同様である． □

さて, つぎの命題がしられている．

Proposition 2.5. *Singular Curves. [H, II.6, p148]*

X: projective curve over k, $\tilde{X}$: その normalization, $\pi:X\to\tilde{X}$ を projection map, $P\in X$ にたいし, $\tilde{\mathcal{O}_P}$: integral closure of $\mathcal{O}_P$ とするとき,

$$0\longrightarrow\bigoplus_{P\in X}\tilde{\mathcal{O}_P}^{\times}/\mathcal{O}_P^{\times}\longrightarrow\operatorname{Pic}X\xrightarrow{\pi^*}\operatorname{Pic}\tilde{X}\longrightarrow 0$$

なる exact sequence をえる．

これまでは k は一般の体でもよかったが, この命題をつかうために k は閉体とかんがえることにする. (2.1) および (2.4) により,

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}_P}^\times/\mathcal{O}_P^\times \oplus \tilde{\mathcal{O}_Q}^\times/\mathcal{O}_Q^\times \longrightarrow \mathrm{Pic}C \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\tilde{C} \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

という exact sequence をえる. ゆえに, つぎがわかる.

Proposition 2.6. $\mathrm{Pic}^0 C = \tilde{\mathcal{O}_P}^\times/\mathcal{O}_P^\times \oplus \tilde{\mathcal{O}_Q}^\times/\mathcal{O}_Q^\times$

$\tilde{\mathcal{O}_P}^\times/\mathcal{O}_P^\times \cong k[T]_{(T)}{}^\times / k[T^m, T^l]_{(T^m,T^l)}{}^\times$ であるから (Q についても同様), 以降では この右辺 についてしらべることにする.

3 $B^\times / A^\times = (\hat{B})^\times / (\hat{A})^\times$

Proposition 3.1. $(A, \mathfrak{m}) \subset (B, \mathfrak{n})$*:local rings, k:subfield of* A*,* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$*,* について自然にみちびかれる写像によって*,* $k \cong A/\mathfrak{m} \cong B/\mathfrak{n}$*,* となるとする. さらに*,* $\exists i_0 > 0 : \mathfrak{n}^{i_0} \subset \mathfrak{m}$ をみたすとする. このとき*,*

$$B^\times / A^\times \cong (\hat{B})^\times / (\hat{A})^\times$$

がなりたつ*.*

Remark 3.2. 条件 "$\mathfrak{n}^{i_0} \subset \mathfrak{m}$" から, $\{\mathfrak{n}^i \cap A\}$ と $\{\mathfrak{m}^i\}$ による linear topology は一致することになる. ゆえに $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^i = \varprojlim A/\mathfrak{n}^i \cap A$ とわかる.

Example 3.3. $l > m > 0,\ (l,m) = 1,\ A = k[T^l, T^m]_{(T^l,T^m)},\ B = \tilde{A} = k[T]_{(T)}$ について, $i \gg 0 : T^i \in (T^l, T^m)$ であり, $\hat{A} = k[[T^l, T^m]]$, $\hat{B} = k[[T]]$ であるから,

$$k[T]_{(T)}{}^\times / k[T^m, T^l]_{(T^m,T^l)}{}^\times = k[[T]]^\times / k[[T^m, T^l]]^\times$$

をえる.

それでは, proposition を順をおってしめそう.

3.1 準備

Lemma 3.4. *A:ring,* $\{I_j\}$*:directed set of ideals in* A*,* $\{I_j\}$ による *completion* について*,*

$$(\hat{A})^\times = \varprojlim (A/I_j)^\times$$

となる*.*

Proof. $G = \varprojlim (A/I_j)^\times$ としよう. $(A/I_j)^\times \hookrightarrow A/I_j$ を monoid hom としてみると, $G \hookrightarrow \hat{A}$ なる monoid hom をみちびく. G は group だから,

$$G \hookrightarrow (\hat{A})^\times\text{: group hom}$$

をえる.

$\forall a = (a_1, a_2, \dots) \in (\hat{A})^\times,\ a_j \in A/I_j$ をとる. 逆元 $b = (b_1, b_2, \dots) \in (\hat{A})^\times,\ b_j \in A/I_j$ をとれば, $ab = (1, 1, \dots)$ となる. すなわち, $a_j b_j = 1$ in A/I_j , $a_j \in (A/I_j)^\times$ とわかる. ゆえに $a \in G$, surjection とわかる. $\square$

Lemma 3.5. *A:ring,* $\mathfrak{m}$*:maximal ideal of A, k:subfield of A,* $k \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ *:isom* について,

$$A \to k \oplus \mathfrak{m},\ a \mapsto (\bar{a}, a - \bar{a})$$

は *isomorphism* とわかる. とくに, *A:local ring* なら,

$$A^{\times} \cong k^{\times} \oplus \mathfrak{m}$$

となる.

Proof. $0 \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to 0$ は, $A/\mathfrak{m} \cong k \hookrightarrow A$ によって split exact となる. □

Corollary 3.6. $(A, \mathfrak{m})$*:local ring, k:subfield of A,* $k \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ *:isom* について,

$$A^{\times} \twoheadrightarrow (A/\mathfrak{m}^i)^{\times}$$

をえる.

Proof. $A^{\times} = k^{\times} \oplus \mathfrak{m} \twoheadrightarrow (A/\mathfrak{m}^i)^{\times} = k^{\times} \oplus (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^i)$ による. □

3.2 Exact Sequence

Lemma 3.7. *(3.1)* の条件のもと, $i \geqslant i_0$ について, つぎの *exact sequence* をえる.

$$1 \longrightarrow (A/\mathfrak{n}^i \cap A)^{\times} \xrightarrow{\alpha} (B/\mathfrak{n}^i)^{\times} \xrightarrow{\beta} B^{\times}/\,A^{\times} \longrightarrow 1$$

以下それをみよう.

3.2.1 写像の作りかた

α はあきらかな作りかた. β は, (3.6) から

$$\begin{tikzcd} B^{\times} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (B/\mathfrak{n}^i)^{\times} \arrow[r, "\beta"'] & B^{\times}/\,A^{\times} \end{tikzcd}$$

が可換になるようにつくる.

$b - c \in \mathfrak{n}^i$, $b, c \in B^{\times}$ とすると, $bc^{-1} - 1 \in \mathfrak{n}^i \subset \mathfrak{m}$ となる. ゆえ, $bc^{-1} = 1 + m$, $m \in \mathfrak{m}$ のかたちとなり, $bc^{-1} \in A^{\times}$ とわかる. よって, $b = c$ in $B^{\times}/\,A^{\times}$ だから, well-defined とわかる.

さて, α: inj および β: surj はあきらか. あとはつぎが示されればよい.

3.2.2 Exact at $(B/\mathfrak{n}^i)^{\times}$

つぎの図式をみる.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & B^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & B^{\times}/\,A^{\times} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & (A/\mathfrak{n}^i \cap A)^{\times} \arrow[r, "\alpha"'] & (B/\mathfrak{n}^i)^{\times} \arrow[r, "\beta"'] & B^{\times}/\,A^{\times} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

$(\beta \circ \alpha)(a) = 1$ はあきらか. $\bar{b} \in (B/\mathfrak{n}^i)^{\times}$, $\beta(\bar{b}) = 1$ とする. $b \in A^{\times}$ とわかるから, $\tilde{b} \in (A/\mathfrak{n}^i \cap A)^{\times}$. これにより, $\alpha(\tilde{b}) = \bar{b}$ をえる. これで, (3.7) がわかった.

3.3 Proof of (3.1)

$\varprojlim_i$ は充分大きい i について議論すればよいのだから, (3.7) と (3.4) をもちいて,

$$1 \longrightarrow (\hat{A})^\times \longrightarrow (\hat{B})^\times \longrightarrow B^\times / A^\times$$

なる exact sequence をえる. あとは右辺の surj がわかればよい.

しかしそれは, $b \in B^\times$ について, $(b, b, \dots) \in \varprojlim (B/\mathfrak{n}^i)^\times = (\hat{B})^\times$ をとればよいのだから, あきらか.

4 $k[[T]]^\times / k[[T^m, T^l]]^\times$.

4.1 目標

k は体, その標数を p, $l > m > 0$, $(l, m) = 1$ について,

$$G = k[[T]]^\times / k[[T^m, T^l]]^\times$$

とさだめる.

この群の構造をしらべることにしよう.

4.2 準備

$I = \{i_1, i_2, \cdots, i_M\} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \setminus (l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0} + m \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_M$, のように記号をさだめることにしよう. このとき, つぎのことがわかる.

Proposition 4.1. $M = \frac{lm - l - m + 1}{2}$.

Example 4.2. $l = 4, m = 3$ とすれば, $I = \{1, 2, 5\}$, $M = 3$ である.

それでは, proposition を順をおってしめすことにする.

4.2.1 $l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0} + m \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ の等式

$(l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0} + m \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0}) = l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \sqcup (m + l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \sqcup \cdots \sqcup ((l-1)m + l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ とわかる. 右辺の "$\sqcup$" なることは, $(l, m) = 1$ より. "$\supset$" はあきらか.

$\subset$: $am + bl \in$ 左辺, $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ をとる. このとき $a = cl + d$, $c, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $d < l$ をとれば, $am + bl = dm + (cm + b)l \in$ 右辺 となる.

4.2.2 $i_M < lm$

$\forall a \geqslant lm$ をとる. $(l, m) = 1$ より, $0 \leqslant \exists b \leqslant l - 1:\ a \in bm + l\mathbb{Z}$ すると, $\exists c:\ a = bm + cl$ このとき $cl = a - bm \geqslant lm - bm \geqslant 0$ のゆえ $c \geqslant 0$, $a \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cdot l + \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cdot m)$ となる. よって, $i_M < lm$ とわかる.

4.2.3 Proof of (4.1)

つぎのものの個数を N とする.

$$\begin{aligned}
& \{1,2,\cdots,lm\}\cap(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\cdot l+\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\cdot m) \\
= \ & \{1,2,\cdots,lm\}\cap[l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\sqcup(m+l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0})\sqcup\cdots\sqcup((l-1)m+l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0})] \\
= \ & [\{1,2,\cdots,lm\}\cap l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0}]\sqcup[\{1,2,\cdots,lm\}\cap(m+l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0})] \\
& \qquad \sqcup\cdots\sqcup[\{1,2,\cdots,lm\}\cap((l-1)m+l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0})].
\end{aligned}$$

$0\leqslant r\leqslant l-1$ について, $\#\{1,2,\cdots,lm\}\cap(r+l\cdot\mathbb{Z}_{\geqslant 0})=\left(\left\lfloor\frac{lm-r}{l}\right\rfloor+1\right)$ となることがわかるから,

$$\begin{aligned}
N &= m+\left(\left\lfloor\frac{lm-m}{l}\right\rfloor+1\right)+\cdots+\left(\left\lfloor\frac{lm-(l-1)m}{l}\right\rfloor+1\right) \\
&= m+l-1+\sum_{k=1}^{l-1}\left\lfloor\frac{km}{l}\right\rfloor.
\end{aligned}$$

ここで, “$\lfloor x\rfloor$” は, 切下げ関数. あとで述べる切下げ関数の公式により,

$$N = m+l-1+\frac{(l-1)(m-1)}{2}=\frac{lm+l+m-1}{2}.$$

よって $i_M<lm$ であることから,

$$M=lm-N=\frac{lm-l-m+1}{2}$$

となることがわかった.

4.2.4 切下げ関数の公式

$n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ x\in\mathbb{R},\ d=\gcd(m,n)$ について,

$$\sum_{0\leqslant k<m}\left\lfloor\frac{nk+x}{m}\right\rfloor=d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}$$

がなりたつ. [C, 3 章 5 節, p94]

4.3 G の元のかたち

4.3.1 高次のきりすて

Lemma 4.3. $F=1+a_1T+\cdots\in k[[T]]^\times$ について, $f=1+a_1T+\cdots+a_{i_M}T^{i_M}\in k[T]$ とすれば,

$$F=f \qquad in\ G$$

となることがわかる.

Proof. $f\in k[[T]]^\times$ のゆえ, $\exists g\in k[[T]]^\times$ s.t. $fg=1$ in $k[[T]]$ をとれる. このとき,

$$gF=g(f+T^{i_M+1}F')=1+T^{i_M+1}gF' \quad \in k[[T^l,T^m]]^\times$$

である. ゆえに, $F=(fg)F=f(gF)=f$ in G とわかる. □

4.3.2　標準型

Proposition 4.4. $\forall F \in G$ について,

$$\exists_1 f = 1 + a_{i_1}T^{i_1} + a_{i_2}T^{i_2} + \cdots + a_{i_M}T^{i_M} \ \ s.t.\ F = f \quad in\, G \tag{4}$$

となる．このような f を標準型とよぶことにする．

とくに, $F = 1 + b_{i_r}T^{i_r} + b_{i_r+1}T^{i_r+1} + \cdots b_{i_M}T^{i_M}$ のばあいは, 標準型の i_r 次以下の係数はかわらない．すなわち,

$$1 + b_{i_r}T^{i_r} + a_{i_{(r+1)}}T^{i_{(r+1)}} + \cdots a_{i_M}T^{i_M} \tag{5}$$

のようになる．

Proof. **一意:** $\{j_1, \cdots, j_N\} = \{1, 2, \cdots, i_M\} \setminus \{i_1, \cdots, i_M\},\ j_1 < \cdots < j_N$ とする．

$$\begin{aligned} f &= 1 + a_{i_1}T^{i_1} + a_{i_2}T^{i_2} + \cdots + a_{i_M}T^{i_M}, \\ g &= 1 + b_{i_1}T^{i_1} + b_{i_2}T^{i_2} + \cdots + b_{i_M}T^{i_M}, \\ f &= g \qquad \text{in } G. \end{aligned}$$

なるものがあるとする．$\exists h = c_0 + c_{j_1}T^{j_1} + c_{j_2}T^{j_2} + \cdots + c_{j_N}T^{j_N} + T^{i_M+1}h' \ \in k[[T^l, T^m]]$: $f = hg$ in $k[[T]]$ となる．あきらかに $c_0 = 1$.

$0 = f_{j_1} = (hg)_{j_1} = c_{j_1}$ である．$r > 1,\ c_{j_1} = \cdots = c_{j_{(r-1)}} = 0$ とすると $0 = f_{j_r} = (hg)_{j_r} = c_{j_r}$ である．ゆえに帰納法によって, $c_{j_1} = \cdots = c_{j_N} = 0$ であると言える．

よって, $h = 1 + T^{i_M+1}h'$ となるから, $f = hg = g + T^{i_M+1}h'g$. f には $i_M + 1$ 以上の次数の項はないのだから, $f = g$ とわかる．

存在: (4.3) より, $F = 1 + b_1T + \cdots b_{i_M}T^{i_M}$ in G のかたちに表すことはできて,

$$\begin{aligned} F &= F \cdot (1 + c_{j_1}T^{j_1} + \cdots + c_{j_N}T^{j_N}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{i_M+j_N} (\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k})T^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{i_M} (\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k})T^n \qquad \text{in } G, \end{aligned}$$

とすることができる．

j_1 次の係数 $= b_{j_1} + c_{j_1} = 0$ となるよう c_{j_1} をさだめる．$n > 1$ について, j_n 次の係数 $= b_{j_n} + b_{(j_n-j_1)}c_{j_1} + b_{(j_n-j_2)}c_{j_2} \cdots + c_{j_n} = 0$ となるよう c_{j_n} をさだめる．このくりかえしから得られた $(1 + c_{j_1}T^{j_1} + \cdots + c_{j_N}T^{j_N})$ によって, F は標準型に変形される．

また, $F = 1 + b_{i_r}T^{i_r} + b_{i_r+1}T^{i_r+1} + \cdots b_{i_M}T^{i_M}$ とするとき, $s : j_s < i_r < j_{(s+1)}$ について, $c_{j_1} = c_{j_2} = \cdots = c_{j_s} = 0$ となる．このとき, 標準型は (5) のかたちになる．

□

4.4　Homomorphisms

4.4.1　(T^r)

$k[[T]] \hookrightarrow k[[T]],\ T \mapsto T^r$ により, つぎの group hom がさだまる．

$$\begin{aligned} (T^r) : G &\hookrightarrow G \\ T &\mapsto T^r \end{aligned}$$

4.4.2 exp

$p = \operatorname{char} k = 0$ のとき, つぎの group hom をさだめることができる.

$$\begin{array}{rcl} \exp(\,\cdot T) : \mathbf{G}_{\mathrm{a}} & \hookrightarrow & G \\ a & \mapsto & \exp(aT) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} T^n \left(= \sum_{n=0}^{i_M} \frac{a^n}{n!} T^n \right) \end{array}$$

$p > 0$ のときは, exp は一般にはさだまらないが, いまは (4.3) により高次の項をきりすてることができる.

ゆえ, $p > i_M$ であれば, つぎのように hom がさだまる.

$$\begin{array}{rcl} \exp(\,\cdot T) : \mathbf{G}_{\mathrm{a}} & \hookrightarrow & G \\ a & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{i_M} \frac{a^n}{n!} T^n \end{array}$$

実際, $p > n \geqslant 0$ であれば, $p \nmid n!$ であるからよいのである.

Example 4.5. $l = 3, m = 2$ のばあい, $i_M = 1$ であるから, すべての標数 p ついて, $\exp(\,\cdot T) : \mathbf{G}_{\mathrm{a}} \hookrightarrow G,\ a \mapsto \exp(aT) = 1 + aT$, のようにさだめることができる.

Example 4.6. "$p > i_M$" の条件は満たされなくとも, exp はさだめ得る. たとえば, $l = 4, m = 3$ のとき $i_M = 5$ であるが, $p = 3$ についても,

$$\exp(\,\cdot T) : \mathbf{G}_{\mathrm{a}} \hookrightarrow G,\ a \mapsto \exp(aT) = 1 + aT + \frac{a^2}{2} T^2 + \frac{a^5}{20} T^5,$$

によって homomorphism of groups をさだめることが可能である.

4.4.3 $\exp(\,\cdot T^r)$

$p = 0$ or $p > i_M$ について, $\exp(\,\cdot T^r) = (T^r) \circ \exp(\,\cdot T)$ により,

$$\begin{array}{rcl} \exp(\,\cdot T^r) : \mathbf{G}_{\mathrm{a}} & \hookrightarrow & G \\ a & \mapsto & 1 + aT^r + \dfrac{a^2}{2!} T^{2r} + \cdots + \dfrac{a^{i_M}}{i_M!} T^{i_M \cdot r} \end{array}$$

なる group hom をえる.

4.5 構造の決定

Theorem 4.7. *$p = 0$ or $p > i_M$ とする. このとき,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^M & \longrightarrow & G \\ a = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\} & \longmapsto & \exp(a_1 T^{i_1}) \exp(a_2 T^{i_2}) \cdots \exp(a_M T^{i_M}) \end{array}$$

により isomorphism of groups をえる.

4.5.1 Injective

$a \in \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^M,\ \varphi(a) = 1$ とする.

このとき, $1 = \varphi(a) = (1 + a_{i_1}T^{i_1} + \cdots)(1 + a_{i_2}T^{i_2} + \cdots)\cdots(1 + a_{i_M}T^{i_M} + \cdots) = 1 + a_{i_1}T^{i_1} + T^{i_1+1}(\cdots)$ となる. この標準型は $1 + a_{i_1}T^{i_1} + a'_{i_2}T^{i_2} + \cdots$ のかたちになるから, 一意性より, $a_{i_1} = 0$ とわかる.

$r > 1$ についてのくりかえし. $a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$ とすると, $1 = \varphi(a) = (1 + a_{i_r}T^{i_r} + \cdots)(1 + a_{i_{r+1}}T^{i_{r+1}} + \cdots)\cdots(1 + a_{i_M}T^{i_M} + \cdots) = 1 + a_{i_r}T^{i_r} + T^{i_r+1}(\cdots)$ この標準型は $1 + a_{i_r}T^{i_r} + a'_{i_{r+1}}T^{i_{r+1}} + \cdots$ となり, 一意性より, $a_{i_r} = 0$ とわかる.

ゆえに, $a = \{0, \cdots, 0\}$ となることがわかる.

4.5.2 Surjective

任意に $f \in G$ をとる.

標準型を $f = 1+a^{(1)}_{i_1}T^{i_1}+a^{(1)}_{i_2}T^{i_2}+\cdots+a^{(1)}_{i_M}T^{i_M}$ とする. $\exp(-a^{(1)}_{i_1}T^{i_1})f = 1+T^{i_1+1}(\cdots) = 1 + a^{(2)}_{i_2}T^{i_2} + \cdots + a^{(2)}_{i_M}T^{i_M}$ (標準型) in G となる.

$r : M > r > 1$ についてのくりかえし. $\exp(-a^{(r-1)}_{i_{r-1}}T^{i_{r-1}})\cdots\exp(-a^{(2)}_{i_2}T^{i_2})\exp(-a_{i_1}T^{i_1})f = (1 + a^{(r)}_{i_r} + \cdots + a^{(r)}_{i_M})$ と假定すると,

$$\begin{aligned} & \exp(-a^{(r)}_{i_r}T^{i_r})\cdots\exp(-a^{(2)}_{i_2}T^{i_2})\exp(-a_{i_1}T^{i_1})f \\ = \ & \exp(-a^{(r)}_{i_r}T^{i_r})(1 + a^{(r)}_{i_r} + \cdots + a^{(r)}_{i_M}) \\ = \ & 1 + T^{i_r+1}(\cdots) \\ = \ & 1 + a^{(r+1)}_{i_{r+1}} + \cdots + a^{(r+1)}_{i_M} \ (\text{標準型}) \text{ in } G \end{aligned}$$

となる. よって $r = M - 1$ をみれば,

$$\begin{aligned} & \exp(-a^{(M-1)}_{i_{M-1}}T^{i_{M-1}})\cdots\exp(-a^{(2)}_{i_2}T^{i_2})\exp(-a^{(1)}_{i_1}T^{i_1})f \\ = \ & 1 + a^{(M)}_{i_M}T^{i_M} \ (\text{標準型}) \\ = \ & \exp(a^{(M)}_{i_M}T^{i_M}) \quad \text{in } G, \end{aligned}$$

が成立する. それゆえ $\varphi(a^{(1)}_{i_1}, a^{(2)}_{i_2}, \cdots, a^{(M)}_{i_M}) = f$ とわかる.

5 $\mathrm{Pic}^0 C$

C: $x^l = y^m z^n$ in $\mathbb{P}^2_k$, $l = m + n$, $l > m > n > 0$, $(l, m) = 1$, k: algebraically closed field, $p = \operatorname{char} k$ とする.

(2.6) から $P = (0 : 0 : 1)$, $Q = (0 : 1 : 0)$ について,

$$\mathrm{Pic}^0 C = \tilde{\mathcal{O}_P}^{\times}/\mathcal{O}_P^{\times} \oplus \tilde{\mathcal{O}_Q}^{\times}/\mathcal{O}_Q^{\times}$$

をえて, (3.3) より

$$\tilde{\mathcal{O}_P}^{\times}/\mathcal{O}_P^{\times} = k[\,T\,]_{(T)}{}^{\times}\big/\,k[\,T^m, T^l\,]_{(T^m,T^l)}{}^{\times} = k[[\,T\,]]^{\times}\big/\,k[[\,T^m, T^l\,]]^{\times}$$

をえる. さらに (4.1) および (4.7) により,

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_M\} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \setminus (l \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0} + m \cdot \mathbb{Z}_{\geqslant 0}),\ i_1 < i_2 < \cdots < i_M,$$

について,

$$M = \frac{lm - l - m + 1}{2}$$

であって, $p=0$ あるいは $p>i_M$ ならば,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{M} & \xrightarrow{\sim} & k[[T]]^{\times}/k[[T^m,T^l]]^{\times}=\tilde{\mathcal{O}_P}^{\times}/\mathcal{O}_P^{\times} \\ \{a_1,a_2,\cdots,a_M\} & \longmapsto & \exp(a_1T^{i_1})\exp(a_2T^{i_2})\cdots\exp(a_MT^{i_M}) \end{array}$$

なる isomorphism of groups があたえられる.

おなじ議論は Q についてもあてはまる. さて,

$$N=\max\{i_M(P)|P\in\operatorname{Sing}C\},$$

としよう.

$p=0$ あるいは $p>N$ とすると, $\frac{lm-l-m+1}{2}+\frac{ln-l-n+1}{2}=\frac{(l-1)(l-2)}{2}=p_a(C)$ であるわけだから,

$$\begin{aligned} \operatorname{Pic}^0C &= \tilde{\mathcal{O}_P}^{\times}/\mathcal{O}_P^{\times}\oplus\tilde{\mathcal{O}_Q}^{\times}/\mathcal{O}_Q^{\times} \\ &= k[[T]]^{\times}/k[[T^m,T^l]]^{\times}\oplus k[[T]]^{\times}/k[[T^n,T^l]]^{\times} \\ &= \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{\frac{lm-l-m+1}{2}}\oplus\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{\frac{ln-l-n+1}{2}} \\ &= \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{p_a(C)} \end{aligned}$$

とわかる. すなわちつぎの結果をえる.

Theorem 5.1. *$p=0$ あるいは $p>N$ (つまり exp がさだまるとき) について,*

$$\operatorname{Pic}^0C\cong\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{p_a(C)}$$

が成立する.

参考文献

[AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley, 1969

[C] D. E. Knuth 他著／有澤　誠・安村通晃・萩野達也・石畑　清訳, 「コンピュータの数学」. 共立出版, 1993

[H] R. Hartshorn, Algebraic geometry. Springer, 1977

[M] M. Matumura, Commutative ring theory. Cambridge University Press, 1986