博士論文公聴会

LEMCKE Niklas

早稲田大学基幹理工学研究科
数学応用数理専攻
椙研究室

論文

出版済みまたは掲載決定

[1] N. Lemcke, *Duality for Witt–divisorial sheaves*, Arkiv för Matematik **60**, (2022), no. 1, 107-124.

プレプリント

[2] N. Lemcke, *Vanishing and a counterexample for Witt divisorial sheaves*, arXiv:2305.17893v2 (submitted).

学位論文の構成

表題

Duality, vanishing, and a counterexample
for Witt divisorial sheaves
(因子的 Witt 層の双対性、消滅と反例)

構成

第 1 章 : Introduction （主結果の概要）
第 2 章 : Prerequisites
第 3 章 : Duality
第 4 章 : Vanishing
第 5 章 : Counterexample

小平消滅

X : N-次元滑らかな射影多様体/$\mathbb{C}$、D : X 上の $\mathbb{Z}$-因子。

定理（小平消滅）

D : ample ならば,

$$H^j(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0 \text{ for } j < N.$$

定理（Serre 双対性）

$\mathcal{L}$: 可逆層、

$$H^{N-i}(X, \mathcal{L}^{-1}) \cong H^i(X, \mathcal{L} \otimes \Omega_X^N)^\vee.$$

小平消滅の 2 つの表現

i) $H^j(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$

ii) $H^{N-j}(X, \mathcal{O}_X(D) \otimes \Omega_X^N) = 0$ for $j < N$.

<u>注意</u>

正標数で小平消滅定理は成立しない。

Witt ベクトル

正標数環 A の Witt ベクトル環 $W(A)$ の標数はゼロ。

定義

- 集合として $W(A) := \prod^{\infty} A$; $W := W(k)$
- $F : (a_i) \mapsto (\sigma(a_i))$、$\sigma$-線形
- $V : (a_0, a_1, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$、$\sigma^{-1}$-線形
- $FV = VF = p$
- 有限長 Witt ベクトル $W_n := W/V^nW$。

例

$W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$ (p-進整数)

Witt 層

- $W\mathcal{O}_X(U) := W(\mathcal{O}(U))$
- $W\mathcal{O}_X(D)(U) := \{(f_0, f_1, \ldots); f_i \in \mathcal{O}(p^i D)(U)\}$: $\mathbb{Z}$-因子ならば、可逆 $W\mathcal{O}_X$-層

本研究の動機：田中の消滅定理

定理（田中）

X : k 上の滑らかな射影代数多様体、A : ample $\mathbb{Q}$-因子、$char(k) = p > 0$.

i) $H^j(X, W\mathcal{O}_X(-A))_{\mathbb{Q}} = 0$ for any $j < N$,

ii) $H^i(X, \mathcal{H}om_{W\mathcal{O}_X}(W\mathcal{O}_X(-A), W\Omega_X^N))_{\mathbb{Q}} = 0$ for any $0 < i$.

問

i) と ii) の双対関係があるか、

特に、i) $\Rightarrow$ ii) は成立するか。

研究の発端：Ekedahl の双対定理

- 田中の消滅定理が de Rham–Witt 複体 $W\Omega_X^\bullet$ を使用する。
- 先行研究にその複体の双対定理がある。
- R : Raynaud-環

定理（Ekedahl-Grothendieck 双対性）

$$R\,\mathrm{Hom}_R(R\Gamma(W\Omega_X^\bullet), \check{R})(-N)[-N] \cong R\Gamma(W\Omega_X^\bullet).$$

証明の鍵は

$$R_n \otimes_R^L R\Gamma_S(W\Omega_X^\bullet) \cong R\Gamma_S(W_n\Omega_X^\bullet).$$

双対性：難点

$\phi : X \to S := \mathrm{Spec}(k)$ とすると、Ekedahl により、

$$R\phi_* \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N) \cong \mathcal{H}om_{W_n}(R\phi_* W_n\mathcal{O}_X(D), W_n[-N])$$

無限長版の双対性を得るため、両方の射影系の極限を取る：

- $R\lim_n \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N)$
  難点：射影系が Mittag–Leffler 条件を満たすか
- $R\lim_n \mathcal{H}om_{W_n}(R\phi_* W_n\mathcal{O}_X(D), W_n[-N])$
  難点：
  - $\mathbb{Z}$-因子ではなければ、$W\mathcal{O}_X(D)$ は可逆層ではない $\rightsquigarrow$ 射影分解が必要
  - V, F は $W\mathcal{O}_X$-写像ではない $\rightsquigarrow$ Cartier–Dieudonné-環を使用
  - $W\mathcal{O}_X$ 上の V, F は $W\mathcal{O}_X(D)$ の自己準同型ではない $\rightsquigarrow$ 層を広げる

双対性：ML 条件

ML 条件

射影系 (M_n, ϕ_n) が ML 条件を満たす $\Leftrightarrow$ (M_n, ϕ_n) は「eventually stable」
例：すべての ϕ_n は全射ならば、ML が満たされている。

1. D は $\mathbb{Z}$-因子：$\cdot \otimes W\mathcal{O}_X(D)$ は exact なので、ML 条件が満たされる：

$$W_{n+1}\Omega_X^N \otimes W_{n+1}\mathcal{O}_X(D) \to W_n\Omega_X^N \otimes W_n\mathcal{O}_X(D).$$

2. $\mathbb{Z}_{(p)}$-因子（$\ell \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ にとって ℓD は $\mathbb{Z}$-因子）：
   田中の方法を用いて $\mathbb{Z}$-因子に帰着できる。
3. $\mathbb{Q}$-因子：
   Frobenius を用いて $\mathbb{Z}_{(p)}$-因子に帰着できる。

双対性：ML 条件

補題

$$R^i \lim_n \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(p^t D), W_n\Omega_X^N) = 0 \text{ for all } t, 0 < i.$$

定理

D：$\mathbb{Q}$-因子。

$$R\lim_n \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N) \cong \mathcal{H}om_{W\mathcal{O}_X}(W\mathcal{O}_X(D), W\Omega_X^N).$$

双対性：難点

$\phi : X \to S := \mathrm{Spec}(k)$ とすると、Ekedahl により、

$$R\phi_* \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N) \cong \mathcal{H}om_{W_n}(R\phi_* W_n\mathcal{O}_X(D), W_n[-N])$$

無限長版の双対性を得るため、両方の射影系の極限を取る：

- $R\lim_n \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N)$
  ~~難点：射影系が Mittag–Leffler 条件を満たすか~~
- $R\lim_n \mathcal{H}om_{W_n}(R\phi_* W_n\mathcal{O}_X(D), W_n[-N])$
  難点：
  - $\mathbb{Z}$-因子ではなければ、$W\mathcal{O}_X(D)$ は可逆層ではない $\rightsquigarrow$ 射影分解が必要
  - V, F は $W\mathcal{O}_X$-写像ではない $\rightsquigarrow$ Cartier–Dieudonné-環を使用
  - $W\mathcal{O}_X$ 上の V, F は $W\mathcal{O}_X(D)$ の自己準同型ではない $\rightsquigarrow$ 層を広げる

双対性：可逆層ではない

Ekedahl：

$$R_n \otimes^L_R R\Gamma_S(W\Omega^\bullet_X) \cong R\Gamma_S(W_n\Omega^\bullet_X).$$

であるが、$\mathbb{Q}$-因子 D の場合、

$$W_n\mathcal{O}_X \overset{L}{\underset{W\mathcal{O}_X}{\otimes}} W\mathcal{O}_X(D) \ncong W_n\mathcal{O}_X(D).$$

$$0 \to W\mathcal{O}_X \xrightarrow{V} W\mathcal{O}_X \to W_n\mathcal{O}_X \to 0$$

は exact であるが、V は $W\mathcal{O}_X$-写像ではないため、射影分解ではない。

双対性：射影分解

$\rightsquigarrow$ V が線形になるような環を使用する。Cartier–Dieudonné-非可換環

$\omega := W_\sigma[F, V] := \{ FV = VF = p$ を満たす F、V に生成される W-代数 $\}$

$$0 \to \omega \xrightarrow{\cdot V} \omega \to \omega_n \to 0$$

は ω-加群の完全系列である、ω_n の射影分解となる。

命題

M : X 上の ω-加群層とすると、

$$\omega_n \overset{L}{\underset{\omega}{\otimes}} R\Gamma_X(M) \cong R\Gamma_X(M_n).$$

双対性：ω-加群層

$W\mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{F} W\mathcal{O}_X(pD) \xrightarrow{V} W\mathcal{O}_X(D)$ なので、

$W\mathcal{O}_X(D)$ は ω-加群層ではない。

$$\omega(D) := \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} W\mathcal{O}_X(p^t D)$$

とすると、

補題

$$\omega_n \overset{L}{\underset{\omega}{\otimes}} R\Gamma_X(\omega(D)) \cong R\Gamma_X(\omega_n(D)).$$

双対性：難点

$\phi : X \to S := \mathrm{Spec}(k)$ とすると、Ekedahl により、

$$R\phi_* R\mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N) \cong R\mathcal{H}om_{W_n}(R\phi_* W_n\mathcal{O}_X(D), W_n[-N])$$

無限長版の双対性を得るため、両方の射影系の極限を取る：

- $R\lim_n R\mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}_X}(W_n\mathcal{O}_X(D), W_n\Omega_X^N)$
  ~~難点：射影系が Mittag–Leffler 条件を満たすか~~
- $R\lim_n R\mathcal{H}om_{W_n}(R\phi_* W_n\mathcal{O}_X(D), W_n[-N])$
  難点：
  - ~~$\mathbb{Z}$-因子でなければ、$W\mathcal{O}_X(D)$ は可逆層ではない $\rightsquigarrow$ 射影分解が必要~~
  - ~~V, F は $W\mathcal{O}_X$-写像ではない $\rightsquigarrow$ Cartier–Dieudonné-環を使用~~
  - ~~$W\mathcal{O}_X$ 上の V, F は $W\mathcal{O}_X(D)$ の自己準同型ではない $\rightsquigarrow$ 層を広げる~~

双対性：主結果

定理（主結果）

X：滑らかな射影多様体/正標数体 k、D：X 上の $\mathbb{Q}$-因子とすると

$$R\phi_* \mathcal{H}om_{W\mathcal{O}_X}(\omega(D), W\Omega_X^N) \cong R\,\mathrm{Hom}_\omega(R\phi_*\omega(D), \breve{\omega}[-N])$$

十分に大きい t に対して、$W\mathcal{O}_X(p^t D)$ のコホモロジーは V-捻じれがなければ、

$$\cong \mathrm{Hom}_\omega(R\phi_*\omega(D), \breve{\omega}[-N])$$

消滅：ample

定理（田中）

A : X 上の ample $\mathbb{Q}$-因子とすると、

i) $H^j(X, W\mathcal{O}_X(-A))_{\mathbb{Q}} = 0$ for any $j < N$,

ii) $H^i(X, \mathcal{H}om_{W\mathcal{O}_X}(W\mathcal{O}_X(-A), W\Omega_X^N))_{\mathbb{Q}} = 0$ for any $0 < i$.

定理：$i) \Rightarrow ii)$

$\mathbb{Q}$-因子 D が田中 i) を満たすと、

$$\mathcal{H}om_{W\mathcal{O}_X}(H^j(X, W\mathcal{O}_X(D)), W\Omega_X^N) = 0.$$

消滅：曲面上の nef & big

補題（Serre 型消滅）

X：滑らかな射影曲面、D：X 上の nef and big $\mathbb{Q}$-因子 (SNC support) とすると、十分に大きい t に対して、

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-p^t D)) = 0.$$

定理（正標数 Ramanujam 型消滅）

$$H^1(X, W\mathcal{O}_X(-D))_{\mathbb{Q}} = 0.$$

系

したがって、双対性定理により、

$$H^1(X, \mathcal{H}om_{W\mathcal{O}_X}(W\mathcal{O}_X(-D), W\Omega_X^N)) = 0.$$

実例計算

標数ゼロの Ramanujam 消滅が正標数で成立しないが、Witt ベクトルで成立する。
同様に、川又–Viehweg 消滅が正標数の場合に成立しない。

問

川又–Viehweg 型消滅が Witt ベクトルの設定で成立するか。

定理（川又–Viehweg 消滅）

$(X, \Delta), D$ such that $D - \Delta$ は nef and big であれば、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0 \text{ for any } 0 < i.$$

実例計算

条件

1. X：滑らか
2. D：ample ではない
3. ２次元なら、D：nef and big ではない
4. 具体的に計算できそう

実例計算：構成

Langer の構成した曲面

$p := 2$、$k := \mathbb{F}_p$、$S :=$ k-有理点 P_i における $\mathbb{P}^2_k$ の blow-up。
$E_i := S \xrightarrow{f} \mathbb{P}^2_k$ の exceptional 因子。
$L_i := \mathbb{P}^2_k$ 上の k–直線の proper transform。

Cascini–田中の構成した因子

- $B := (p^2+1)f^*H - q\Sigma_{i=1}^{p^2+p+1} E_i$,
- $\Delta := \frac{p}{p+1}\Sigma_{i=1}^{p^2+p+1} L_i$

とすると

- (S, Δ) は klt
- $B - \Delta$ は nef and big
- B は nef and big ではない $\mathbb{Z}$-因子
- $h^1(S, \mathcal{O}_S(-B)) \geq 1$。

実例計算：計算方法

$W_k\mathcal{O}_S(-p^lB)$ の Leray スペクトル系列により５ターム系列がある：

Leray 5 ターム系列

$$
\begin{aligned}
0 &\to H^1(\mathbb{P}^2, f_*W_k\mathcal{O}_S(-p^lB)) \to H^1(S, W_k\mathcal{O}_S(-p^lB)) \\
&\to H^0(\mathbb{P}^2, R^1f_*W_k\mathcal{O}_S(-p^lB)) \to H^2(\mathbb{P}^2, f_*W_k\mathcal{O}_S(-p^lB)) \\
&\to H^2(S, W_k\mathcal{O}_S(-p^lB)).
\end{aligned}
$$

- 第１、３、４、５タームを計算することで第２タームを得る
- 他のタームを分かるために、射影系の transition 写像 $H^1(S, W_n\mathcal{O}_S(-B)) \to H^1(S, W_{n-1}\mathcal{O}_S(-B))$ をが得られる
- 射影系の極限が取れる。

実例計算：transition 写像

Leray 5 ターム系列を取ることは関手的のため、完全系列

$$0 \to F_*\mathcal{O}_S(-p^{n-1}B) \xrightarrow{V^{n-1}} W_n\mathcal{O}_S(-B) \xrightarrow{R} W_{n-1}\mathcal{O}_S(-B) \to 0.$$

から以下の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^{n-1}B)) \arrow[r] \arrow[d, "V^{n-1}"] & A_1^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "V^{n-1}"] & B_1^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "V^{n-1}"] & Q_1^{n-1} \arrow[d, "V^{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & H^1(S, W_n\mathcal{O}_S(-B)) \arrow[r] \arrow[d, "R_n"] & A_n^0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "R_n"] & B_n^0 \arrow[r] \arrow[d, "R_n"] & Q_n^0 \arrow[d, "R_n"] \\
0 \arrow[r] & H^1(S, W_{n-1}\mathcal{O}_S(-B)) \arrow[r, "\psi"] & A_{n-1}^0 \arrow[r] & B_{n-1}^0 \arrow[r] & Q_{n-1}^0
\end{tikzcd}$$

A_l^k, B_l^k のランクを比べ、図式追跡すると第 2 タームの R_n は全射だと証明できる。

注：$n = 2$ の場合は Cascini–田中の反例の証明である。

実例計算：まとめ

定理（反例）

上記の設定で、

$$H^1(S, W\mathcal{O}_S(-B))_{\mathbb{Q}} \neq 0.$$

まとめ

双対性定理

標数零： 小平消滅 i) $\overset{\text{Serre 双対性定理}}{\Longleftrightarrow}$ 小平消滅 ii)

正標数： 田中消滅 i) $\overset{\text{本研究の双対性定理}}{\Longrightarrow}$ 田中消滅 ii)

nef & big 消滅について

２次元（Ramanujam 消滅）	成立
n 次元（境界なし川又-Viehweg）	未知
対数的川又-Viehweg	２次元にも反例あり