公聴会

水野　雄貴

早稲田大学基幹理工学研究科
数学応用数理専攻
楫研究室

論文

出版済みまたは掲載決定

[1] Y. Mizuno, *Classifying the irreducible components of moduli stacks of torsion free sheaves on K3 surfaces and an application to Brill-Noether theory*, J. Geom. Phys. 179 (2022)

[2] Y. Mizuno, *Some examples of noncommutative projective Calabi-Yau schemes*, to appear in Canad. Math. Bull.

プレプリント

[3] Y. Mizuno, *An explicit construction of the derived moduli stack of Harder-Narasimhan filtrations*, arXiv:2202.07494.

学位論文の構成

表題

Moduli stacks of torsion-free sheaves on K3 surfaces and noncommutaive projective Calabi-Yau schemes
(K3 曲面上の torsion-free 層のモジュライスタックと非可換射影 Calabi-Yau スキーム)

構成

第 1 章 : Introduction （主結果の概要）
第 2 章 : Classifying the irreducible components of moduli stacks of torsion-free sheaves on K3 surfaces and an application to Brill-Noether theory（論文 [1]）
第 3 章 : Some examples of noncommutative projective Calabi-Yau schemes （論文 [2]）

Calabi-Yau 多様体, K3 曲面

定義

X : 滑らかな複素射影代数多様体

X が Calabi-Yau 多様体 $\overset{\text{def}}{\iff}$ X の標準束が自明 $(\omega_X \simeq \mathcal{O}_X)$

例

- 楕円曲線
- K3 曲面（2 次元 Calabi-Yau 多様体で $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$）
  - $\mathbb{P}^3$ の 4 次曲面
  - $\mathbb{P}^4$ の 2 次と 3 次の完全交差
  - $\mathbb{P}^2$ の 6 次曲線に沿って分岐する 2 重被覆
- $\mathbb{P}^n$ 内の $n+1$ 次超曲面

注意

K3 曲面は特に正則シンプレクティック多様体になる.

論文 [1] の研究について

Y. Mizuno, *Classifying the irreducible components of moduli stacks of torsion free sheaves on K3 surfaces and an application to Brill-Noether theory*, J. Geom. Phys. 179 (2022)

論文 [1] の研究の動機：問題点と 2 つの解決策

問題点と 2 つの解決策

X：射影代数多様体

問題点

X 上の全ての連接層をパラメトライズするモジュライ空間は
代数多様体やスキームとして構成できない.

解決策

- 扱う層を半安定層に制限する. (モジュライ空間を M_X と書く)
  または
- 多様体やスキームの一般化であるスタックとして構成する.
  (モジュライ空間を $\mathcal{M}_X$ と書く)

多様体, スキーム	集合 + 幾何構造 (位相, 座標近傍, etc.)
スタック	圏 (対象と射の集まり) + 幾何構造

論文 [1] の研究の動機：研究の発端

CY 多様体上の半安定層のモジュライ空間の先行研究

半安定層のモジュライ空間 M_X の研究は多くの応用が存在する.

- 新たな正則シンプレクティック多様体の構成

  定理 (向井茂, 1984)
  X : K3 曲面 $\Rightarrow$ M_X : 正則シンプレクティック多様体

- 不変量の構成

  定理 (Behrend-Fantechi, 1997)
  X : 3 次元 Calabi-Yau 多様体
  X の変形で不変なドナルドソン・トーマス不変量を構成できる.

注意（既約な）正則シンプレクティック多様体で現在知られているものは 4 つのタイプに限る.

研究の発端

全ての連接層のモジュライ空間 (スタック) $\mathcal{M}_X$ の研究も
幾何学の問題へ応用できないだろうか?

論文 [1] の研究の動機：Walter の問題

Walter の問題

X：2 次元射影代数多様体

$\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}$：階数 2 の torsion-free 層のモジュライ空間 (スタック)

① $\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}$ を既約成分に分解せよ

② 点の Hilbert スキームの Brill-Noether 軌跡を既約成分に分解せよ (①の応用)

注意　連接層 $\supset$ torsion-free 層 $\supset$ ベクトル束

	問題 ①	問題 ②
線織曲面	Walter'95	Walter'95 ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$)
Picard 数 1 の K3 曲面	水野 ([1])	水野 ([1])

向井ベクトル，モジュライスタック

X : Picard 数 1 の K3 曲面
$E \in \mathrm{Coh}(X)$

1. $v(E) := (\mathrm{rk}(E), c_1(E), \mathrm{ch}_2(E) + \mathrm{rk}(E)) \in \mathrm{H}^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{H}^4(X, \mathbb{Z})$
2. $\langle v, w \rangle := -[v]_0[w]_2 + [v]_1[w]_1 - [v]_2[w]_0 \in \mathbb{Z}$.
   ただし $v := ([v]_0, [v]_1, [v]_2) \in \mathrm{H}^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{H}^4(X, \mathbb{Z})$
3. $\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)$:

   Obj. E : 向井ベクトルが v の torsion-free 層.

   Mor. $\alpha : E \xrightarrow{\simeq} E'$ 層の同型射
4. $|\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)| := \mathrm{Obj}(\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v))/\simeq$

   $U \subset |\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)|$: 開集合 $\Longleftrightarrow {}^{\exists}\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)$: スタックの開埋め込み.
   s.t. $U = |\mathcal{U}|$

論文 [1] の主結果 : $\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}$ の既約分解

定理 1.1

$v := (2, c_1, e) \in \mathrm{H}^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{H}^4(X, \mathbb{Z})$ とする.
このとき, 以下の既約分解を得る.

$$|\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)| = \overline{|\mathcal{M}_X^{\mathrm{ss}}(v)|} \cup \bigcup_{\langle v_1, v_2 \rangle \leq 1} \overline{|\mathcal{M}_{X,(v_1,v_2)}^{\mathrm{HN}}(v)|}$$

- $\mathcal{M}_X^{\mathrm{ss}}(v)$: 半安定層のモジュライ空間
- $\mathcal{M}_{X,(v_1,v_2)}^{\mathrm{HN}}(v)$: 非半安定層のモジュライ空間 w/ HN タイプ (v_1, v_2)

注意　$|\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}| = \bigsqcup_{v \in \mathbb{Z}^{\oplus 3}} |\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)|$ (非交和)

論文 [1] の主結果 : $\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}$ の既約分解

定理 1.1

$v := (2, c_1, e) \in \mathrm{H}^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{H}^4(X, \mathbb{Z})$ とする.
このとき, 以下の既約分解を得る.

$$|\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)| = \overline{|\mathcal{M}_X^{\mathrm{ss}}(v)|} \cup \bigcup_{\langle v_1, v_2 \rangle \leq 1} \overline{|\mathcal{M}^{\mathrm{HN}}_{X,(v_1,v_2)}(v)|}$$

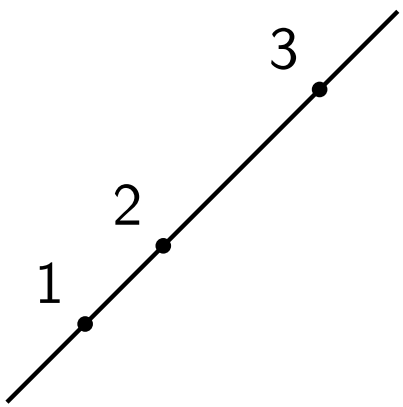
証明について :

- HN-フィルトレーションによるストラティフィケーションの理論,
- 吉岡康太氏による K3 曲面上の連接層の理論

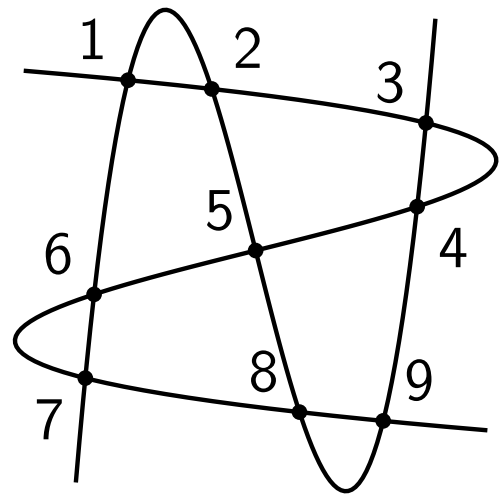
が重要.
$\rightsquigarrow$ ストラタの次元の計算などを行うことによりストラタ間の関係を記述できる.

論文 [1] の主結果： Brill-Noether 軌跡への応用

- $\mathrm{Hilb}^{\ell}(X)$: X 上の ℓ 点の Hilbert スキーム
- $\mathrm{BN}_k^{\ell}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{[Z] \in \mathrm{Hilb}^{\ell}(X) \mid h^0(\mathscr{I}_Z(kH)) > h^0(\mathcal{O}_X(kH)) - \ell\}$
  : $\mathrm{Hilb}^{\ell}(X)$ の k-th Brill-Noether 軌跡
  (X 上の k 次曲線に対し “独立性の崩れた” ℓ 個の点の組達)



例. $\mathrm{BN}_k^{\ell}(\mathbb{P}^2)$ に属する点の組
($\ell = 3, k = 1$: 同一直線上の 3 点)



例. $\mathrm{BN}_k^{\ell}(\mathbb{P}^2)$ に属する点の組
($\ell = 9, k = 3$: 2 つの 3 次曲線の交点)

論文 [1] の主結果： Brill-Noether 軌跡への応用

定理 1.2

$v := (2, kH, \frac{1}{2}k^2H^2 - \ell + 2) \in \mathrm{H}^0(X,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{H}^4(X,\mathbb{Z}), \mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
この時, **単射** φ

$$\varphi : \{\mathrm{BN}_k^\ell(X) \text{ の既約成分 }\} \hookrightarrow \{|\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)| \text{ の既約成分 }\}$$

が存在し, φ の像は以下で与えられる.

$$\mathbf{Im}(\varphi) = \left\{ \overline{|\mathcal{M}^{\mathbf{HN}}_{X,(v_1,v_2)}(v)|} \;\middle|\; \begin{array}{l} [v_1]_1, [v_2]_1 > 0, \\ \langle v_1, v_2\rangle \leq 1,\ [v_2]_2 \geq -1 \end{array} \right\}$$
$$\cup \left\{ \overline{|\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_X(v)|} \ (H^2 = 2 \ \&\ v = \langle 2, 3H, 5\rangle \text{ は除く}) \right\}$$

注意

- φ は以下の有理写像 $\tilde{\varphi}$ により与えられる.

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{BN}_k^\ell(X) \dashrightarrow \mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}(v)$$
$$[Z] \mapsto [0 \to \mathcal{O}_X \to E \to \mathcal{I}_Z(kH) \to 0]$$

- $\mathrm{Im}(\varphi)$ が明示的 $\rightsquigarrow$ $\mathrm{BN}_k^\ell(X)$ の既約成分の個数, 次元が**計算可能**

論文 [2] の研究について

Y. Mizuno, *Some examples of noncommutative projective Calabi-Yau schemes*, to appear in Canad. Math. Bull.

非可換射影幾何学とは

- $k = \bar{k}$: 標数 0 の代数閉体
- $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$: 可換有限生成次数付き k 代数
- $\mathrm{gr}(R)$: 有限生成次数付き R 加群の圏
- $\mathrm{fdim}(R)$: 有限次元な次数付き R 加群の圏

定理 (Serre)

R が R_1 によって R_0 代数として生成されているとする.

$$\mathbf{Coh(Proj(}R\mathbf{))} \simeq \mathbf{qgr(}R\mathbf{)}\ (:= \mathbf{gr(}R\mathbf{)/\,fdim(}R\mathbf{)}).$$

注意　$\mathrm{qgr}(R)$ は具体的には以下のような圏

- $\mathrm{Obj}(\mathrm{gr}(R)) = \mathrm{Obj}(\mathrm{qgr}(R))$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{qgr}(R)}(\pi(M), \pi(N)) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}(R)}(M_{\geq n}, N_{\geq n})$.

  ここで，$\pi : \mathrm{gr}(R) \to \mathrm{qgr}(R)$ は自然な射影.

非可換射影幾何学とは

定理 (Gabriel, Rosenberg)

X, Y : ネータースキーム

$$\mathbf{Coh}(X) \simeq \mathbf{Coh}(Y) \Rightarrow X \simeq Y.$$

スローガン

射影代数幾何学においては $\mathbf{qgr}(R)$ (or $\mathbf{Coh}(X)$) が本質的！

定義 (非可換射影スキーム)

$R = \oplus_{i \geq 0} R_i$: 右ネーター有限生成次数付き k 代数
このとき，R に付随する非可換射影スキーム $\mathbf{Proj_{nc}}(R)$ を以下で定める.

$$\mathbf{Proj_{nc}}(R) := (\mathbf{qgr}(R), \pi(R)).$$

論文 [2] の研究の動機：着想

着想 (論文 [2])

代数幾何学で新たな正則シンプレクティック多様体の構成は**難しい**.

→ **非可換射影スキーム**も含めて考えれば,
「新たな正則シンプレクティック多様体」を構成できるのでは？

注意 (再掲)
(既約な) 正則シンプレクティック多様体で現在知られているものは
4 つのタイプに限る.

どのようにして非可換正則シンプレクティック多様体を定義するか？

→ 少なくとも**非可換射影 Calabi-Yau スキーム**は定義できる

論文 [2] の研究の動機：先行研究と主結果

先行研究

$\mathbb{P}^n$ の超曲面の非可換類似としての例の構成（金沢篤，2015）

論文 [2] の主結果

- 重み付き射影空間の超曲面の非可換類似としての例の構成
- $\mathbb{P}^n$ の積の完全交差の非可換類似としての例の構成

非可換射影 Calabi-Yau スキーム

X：滑らかな射影多様体．X が CY $\overset{def}{\iff} \omega_X \simeq \mathcal{O}_X$.

- $\mathcal{C}$：アーベル圏 (e.g. $\mathrm{Coh}(X), \mathrm{qgr}(R)$)
  $\mathrm{gl.dim}(\mathcal{C}) := \mathrm{Sup}\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(E,F) \neq 0, {}^{\exists} E, F \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})\}$.
- $\mathcal{D}$：三角圏 (e.g. $D^b(\mathrm{Coh}(X)), D^b(\mathrm{qgr(R)})$)
  $\mathcal{D}$ のセール関手とは 関手 $S_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}$ で以下を満たすもの：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(E))^{\vee}.$$

注意　X：射影多様体

X：次元 n の CY 多様体 $\Leftrightarrow \mathrm{gl.dim}(\mathrm{Coh}(X)) < \infty, \mathcal{S}_{D^b(\mathrm{Coh}(X))} \simeq [n]$

定義 (非可換射影カラビ・ヤウスキーム, 金沢 '15)

$\mathrm{Proj_{nc}}(R) = (\mathrm{qgr}(R), \pi(R))$ が CY で次元が n であるとは，

- $\mathrm{gl.dim}\ (\mathrm{qgr}(R)) < \infty$,
- $\mathcal{S}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{qgr}(R))} \simeq [n]$.

が成立することである．

論文 [2] の主結果：重み付き超曲面の非可換類似

- $q_{ij} \in k^\times$ とする．ただし, $0 \leq i, j \leq n$.
  $k[x_0, \cdots, x_n]_{(q_{ij})} := k\langle x_0, \cdots, x_n \rangle / (x_i x_j - q_{ij} x_j x_i)_{0 \leq i,j \leq n}$

定理 2.1

- $(d_0, \cdots, d_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$. ただし, $d_i \mid d_0 + \cdots + d_n (=: d)$.
- $A := k[x_0, \cdots, x_n]_{(q_{ij})} / (x_0^{d/d_0} + \cdots + x_n^{d/d_n})$ with $\deg(x_i) = d_i$.

以下を仮定する.

1. $q_{ii} = q_{ij} q_{ji} = 1, \ ^\forall i, j.$
2. $q_{ij}^{d/d_i} = q_{ij}^{d/d_j} = 1, \ ^\forall i, j.$

このとき,

$\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}(A)$ is **CY で次元が $(n-1)$** $\iff {}^\exists c \in k^\times$ s.t. $c^{d_j} = \prod_{i=0}^{n} q_{ij}$ for $^\forall j$.

注意

- $d_i = 1$ の時, この定理は金沢氏の結果そのものである.

論文 [2] の主結果：重み付き超曲面の非可換類似

証明のアイデア

1. $\mathrm{qgr}(A)$ が滑らかを示す.
   $\to$ 毛利出氏による quasi-Veronese algebras の概念が必要.
2. $\mathcal{S}_{\mathrm{qgr}(A)}$ を計算する
   $\to$ Yekutieli, Van den bergh などによる非可換局所コホモロジーと Serre 関手の理論を用いる.

比較と例

2 次元 NC-CY を考える．$(d_0, d_1, d_2, d_3) = (1, 1, 2, 2)$ とし，

$$(q_{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \omega^2 \\ 1 & 1 & \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega & 1 & 1 \\ \omega & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega := \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

この時, $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}(A)$ は任意の可換な Calabi-Yau 多様体や金沢氏による構成と同型ではない.

論文 [2] の主結果：$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ の完全交差の非可換類似

事実

- $S := k[x_0 \cdots, x_n]$, $T := k[y_0 \cdots, y_m]$.
- $S \otimes_k T$ は $\mathbb{Z}^2$-次数付き代数とみなす.
- f_i : bihomogeneous な多項式 $(i = 1, \cdots, r)$.

このとき,

$\{f_1, \cdots, f_r\}$ により定まる部分スキーム $\simeq \mathrm{Proj}(\Delta(S \otimes T/(f_1, \cdots, f_r)))$.

- $\deg(x_i) = (1, 0), \deg(y_i) = (0, 1)$.
- $\mathbb{Z}^2$-gr alg R について，$\Delta(R) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_{ii}$.

論文 [2] の主結果：$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ の完全交差の非可換類似

定理 2.2

$X := \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}(\Delta(S \otimes T/(f_1, f_2)))$.

(i)

- $S = k[x_0, \cdots, x_n]_{(q_{ij})}$.
- $T = k[y_0, \cdots, y_m]_{(q'_{ij})}$.
- $f_1 = \Sigma x_i^{n+1}, f_2 = \Sigma y_j^{m+1}$.

以下を仮定する.

1. $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = q_{ij}^{n+1} = 1$
2. $q'_{ii} = q'_{ij}q'_{ji} = {q'}_{ij}^{m+1} = 1$

このとき,
X が **CY で次元が $(n + m - 2)$**
$\Longleftrightarrow {}^{\exists} c, c' \in k^{\times}$ s.t.
$c = \Pi_{i=0}^{n} q_{ij}, c' = \Pi_{i=0}^{m} q'_{ij}$.

(ii)

- $S = k[x_0, \cdots, x_n]_{(q_{ij})}$.
- $T = k[y_0, \cdots, y_{n+1}]$.
- $f_1 = \Sigma x_i^{n+1} y_i, f_2 = \Sigma y_j^{n+1}$.

以下を仮定する.

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = q_{ij}^{n+1} = 1$$

このとき,
X が **CY で次元が $(2n - 1)$**
$\Longleftrightarrow {}^{\exists} c \in k^{\times}$ s.t. $c = \Pi_{i=0}^{n} q_{ij}$.

まとめ

K3 曲面上の torsion-free 層のモジュライスタックの研究（論文 [1]）

- Walter の問題
  (スタックとしての連接層のモジュライ空間の研究とその応用)
  ① $\mathcal{M}_X^{\mathrm{tf}}$ を既約分解せよ
  ② Brill-Noether 軌跡を既約分解せよ (①の応用)
- 論文 [1] $\rightarrow$ K3 曲面における Walter の問題の解決

非可換射影 Calabi-Yau スキームの研究（論文 [2]）

- 非可換射影 Calabi-Yau スキーム
  $\rightarrow$ Calabi-Yau 多様体の非可換射影幾何学における拡張
- 論文 [2]
  $\rightarrow$ 非可換射影 Calabi-Yau スキームの 2 通りの新たな例の構成

ご清聴ありがとうございました