Zariski's cancellation problem for principal $\mathbb{G}_a$-bundles over non-$\mathbb{A}^1$-uniruled non-affine schemes

非単線織非アフィンスキーム上の主 $\mathbb{G}_a$ 束に関するザリスキの消去問題

早稲田大学

工藤 陸
Riku Kudou

研究業績

[21] Kudou, R., *About counterexamples for generalized Zariski cancellation problem*, Comm. Algebra **48** (2020), no. 6, 2358-2368. MR4107576

[22] Kudou, R., *Zariski's cancellation problem for principal $\mathbb{G}_a$-bundles over non-$\mathbb{A}^1$-uniruled quasi-affine varieties*, Res. Math. **10** (2023), no. 1, Paper No. 2281061, 6. MR4672555

ザリスキの消去問題とは

k: 体　　V, W: k 上のアフィン代数多様体

V に関するザリスキの消去問題 (ZCP(V))

$$V \times \mathbb{A}^1 \simeq W \times \mathbb{A}^1 \ \Rightarrow \ V \simeq W\ ?$$

$$A[t] \simeq B[s] \ \Rightarrow \ A \simeq B\ ?$$

ザリスキの消去問題 (n-dim ZCP)

$$\mathbb{A}^{n+1} \simeq W \times \mathbb{A}^1 \ \Rightarrow \ \mathbb{A}^n \simeq W\ ?$$

$$k[x_1, \ldots, x_{n+1}] \simeq B[s] \ \Rightarrow \ k[x_1, \ldots, x_n] \simeq B\ ?$$

- ヤコビアン予想, 線形化問題, 多項式環の同型写像, $\mathbb{G}_a$-作用

先行研究：$\mathbb{A}^n$ に関するザリスキの消去問題

ザリスキの消去問題

$$\mathbb{A}^{n+1} \simeq W \times \mathbb{A}^1 \ \Rightarrow\ \mathbb{A}^n \simeq W\ ?$$

$$k[x_1, \ldots, x_{n+1}] \simeq B[s] \ \Rightarrow\ k[x_1, \ldots, x_n] \simeq B\ ?$$

	$\mathrm{char} k = 0$	$\mathrm{char} k > 0$
$n = 1$	◯Abhyankar-Eakin-Heinzer'72	◯ AEH'72
$n = 2$	◯Fujita'79, Miyanishi-Sugie'80, M'75	◯ if k:perfect Russel'81
$n \geq 3$	???	×Gupta'14

partial answer:

Kishimoto'05 ◯($k = \mathbb{C}$, $n = 3$, $\exists \overline{V}$: smooth projective s.t.
$\overline{V} \setminus V$: normal crossing, strictly nef divisor)

V に関するザリスキの消去問題の肯定的な例

V に関するザリスキの消去問題 (ZCP for V)

$$V \times \mathbb{A}^1 \simeq W \times \mathbb{A}^1 \ \Rightarrow \ V \simeq W \ ?$$

$$A[t] \simeq B[s] \ \Rightarrow \ A \simeq B \ ?$$

- ○ アフィン曲線 (AEH'79)
- ○ ログ小平次元が 0 以上の代数多様体 (Fujita-Iitaka'77)
- ○ 非自明な $\mathbb{G}_a$ 作用が無いアフィン代数多様体 (Limanov-Bandman'05)
- ○ 非単線織アフィン代数多様体 or その上の直線束 (Dryło'05)

Definition

V: $(\mathbb{A}^1)$ 単線織 $\Leftrightarrow$ 一般の $p \in V$ に対して ある $f_p : \mathbb{A}^1 \to V$ が存在して $p \in f_p(\mathbb{A}^1)$

ザリスキの消去問題の反例の構成方法

Definition (主 $\mathbb{G}_a$ 束)

X: k-スキーム　　V: X-スキーム, $\mathbb{G}_a \curvearrowright V$
このとき,

$$V\text{: } X \text{ 上の主 } \mathbb{G}_a \text{ 束}$$
$$\Updownarrow$$
ある被覆 $(U_i \to X)$ が存在して $V \times_X U_i$ と $\mathbb{G}_a \times_k U_i$ が $\mathbb{G}_a \times_k U_i$ 同変同型

- 主 $\mathbb{G}_a$ 束$=$ $\mathbb{A}^1$ 束かつファイバーに沿った $\mathbb{G}_a$-作用を持つもの
- X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束 $\leftrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$

Danielewski の直積トリック

X: k-スキーム
V, W アフィン k-スキームかつ X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束

$\Rightarrow$ $V \times_k \mathbb{A}^1 \simeq W \times_k \mathbb{A}^1$.

ザリスキの消去問題の反例の構成方法

Danielewski の直積トリック

X: k-スキーム
V, W アフィン k-スキームかつ X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束
$\Rightarrow V \times_k \mathbb{A}^1 \simeq W \times_k \mathbb{A}^1$.

- $V \not\cong W \Rightarrow W$ は ZCP(V) の反例
- X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束 $\leftrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$
- X: アフィン代数多様体 $\Rightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$
- $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ なら X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束 V, W は $V \not\cong W$ となる可能性

$\rightarrow$ X: 非分離スキーム, 準アフィン代数多様体の場合に ZCP(V) の反例が構成されている

主結果 **X: 非分離スキーム, 準アフィン代数多様体の場合に新たな ZCP(V) の反例を構成**

X : 非分離スキームの場合

先行研究　X:非分離スキームの場合

k: 標数 0 の代数閉体　　Y: 代数多様体　　Z: Y の閉部分多様体

Definition

$$Y_{+}rZ := \underbrace{Y \sqcup_{Y \setminus Z} \cdots \sqcup_{Y \setminus Z} Y}_{r+1}$$

- $Y_{+}rZ$ は $r+1$ 個の Y を $Y \setminus Z$ に沿って貼り合わせた非分離 k-スキーム

先行研究　X:非分離スキームの場合

$Y = \mathrm{Spec}(R)$, $\quad 0 \neq f \in R$, $\quad Z = \mathrm{Z}(f)$, $\quad X = Y_+ Z$ の場合

- X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束の同型類 $\simeq \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq R_f / R$
- $V_g := g \in R_f$ で定義される X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束
- $g = f^{-m} \quad \Rightarrow \quad V_g \simeq \mathrm{Spec}(\mathrm{R}[\mathrm{s}, \mathrm{t}]/(\mathrm{f}^{\mathrm{m}}\mathrm{s} - \mathrm{t}^2 + 1))$

	Y	Z
Danielewski'89	$\mathbb{A}^1$	O
Fieseler'94	アフィン曲線	点
Dubouloz'07	$\mathbb{A}^n$	座標平面の総和
Dryło'07	非単線織アフィン代数多様体	超曲面

Table: $X = Y_+ Z$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束に関する ZCP の反例

4 結果 $\rightarrow$ もし $m_1 \neq m_2$ ならば $V_{f^{-m_1}} \not\simeq V_{f^{-m_2}}$ となる場合がある
ことを示した

主結果 1

論文 [21]
Kudou, R., *About counterexamples for generalized Zariski cancellation problem*, Comm. Algebra **48** (2020), no. 6, 2358-2368. MR4107576

主結果　X:非分離スキームの場合

Theorem 2.4.2. (極の位数が一致する反例構成)

$\mathbb{A}^1_* = \mathrm{Spec}(k[x, x^{-1}])$
$P = \{1\} = \mathrm{Z}(x-1)$
$X = \mathbb{A}^1_{*+}P$

$g_1 = (x+1)\cdot(x-1)^{-2} \quad \in k[x, x^{-1}]_{x-1}$
$g_2 = (x-1)^{-2} \quad \in k[x, x^{-1}]_{x-1}$

このとき

- $V_{g1} \not\cong V_{g2}$
- $V_{g1} \times \mathbb{A}^1 \simeq V_{g2} \times \mathbb{A}^1$
- g_1, g_2 の $f = x - 1$ に関する極の位数は 2

主結果と先行研究の比較

Danielewski, Fieseler, Dubouloz, Dryło
g_1, g_2 の極の位数が異なる場合に $V_{g1} \not\cong V_{g2}$ となる場合がある事を示した

主結果
g_1, g_2 の極の位数が同じあっても $V_{g1} \not\cong V_{g2}$ となる場合がある事を示した

$X = Y_+ Z$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束のアフィン判定法

Proposition 2.2.2.

$Y = \mathrm{Spec} R$: アフィン代数多様体
$Z = \mathrm{Z}(f)$
V_g: $g = h \cdot f^{-m} \in R_f$ で定義される $Y_+ Z$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束

TFAE

1. V_g: アフィン
2. V_g: k 上分離的
3. $m \geq 1$ かつ $(h, f)_R = R$

- 論文では $Y_+ rZ$ の場合に定理を証明
- Fieseler'94 は Y: アフィン曲線, Z: 点の場合に定理を証明
- Dubouloz'07 は $Y = \mathbb{A}^n$, Z: 座標平面の総和 の場合に定理を証明

$X = Y_+ rZ$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束の同型判定

Proposition 2.3.2.

$Y = \mathrm{Spec}(R)$: 非単線織アフィン代数多様体
$Z = \mathrm{Z}(f)$
V_{g_i}: $g_i \in \mathrm{Z}^1(X, \mathcal{O}_X)$ で定義される $Y_+ rZ$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束 $\quad (i = 1, 2)$
この時

$$V_{g_1} \simeq V_{g_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$a \in R^*,\ \phi \in \mathrm{Aut}(Y_+ rZ) \text{ が存在して } \overline{g_1} = \overline{a \cdot \phi_*(g_2)}$$

Proposition 2.3.5.

$$1 \longrightarrow {\mathfrak{S}_{r+1}}^{N_Z} \xrightarrow{S} \mathrm{Aut}(Y_+ rZ) \xrightarrow{T} \mathrm{Aut}_Z(Y) \longrightarrow 1$$

は右分裂な完全列. ただし, N_Z は Z の連結成分の数.

主結果　X:非分離スキームの場合

Theorem 2.4.2.

$\mathbb{A}^1_* = \mathrm{Spec}(k[x, x^{-1}])$　　$g_1 = (x+1)\cdot(x-1)^{-2}$
$P = \{1\} = \mathrm{Z}(x-1)$　　$g_2 = (x-1)^{-2}$
$X = \mathbb{A}^1_{*+} P$

このとき

- $V_{g1} \not\cong V_{g2}$
- $V_{g1} \times \mathbb{A}^1 \simeq V_{g2} \times \mathbb{A}^1$
- g_1, g_2 の $f = x - 1$ に関する極の位数は 2

主結果と先行研究の比較

Danielewski, Fieseler, Dubouloz, Dryło

g_1, g_2 の極の位数が異なる場合に $V_{g1} \not\cong V_{g2}$ となる場合がある事を示した

主結果

g_1, g_2 の極の位数が同じあっても $V_{g1} \not\cong V_{g2}$ となる場合がある事を示した

X :準アフィン代数多様体の場合

X:準アフィン代数多様体の場合

k:標数零の代数閉体
$Y = \mathrm{Spec}(R)$: アフィン代数多様体
(f_1, f_2): R-正則列, $f_1, f_2 \in R$: 素元

■ $X = \mathrm{D}(f_1, f_2) := Y \setminus \mathrm{Z}(f_1, f_2)$

- X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束の同型類 $\simeq \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq R_{f_1 f_2}/(R_{f_1} + R_{f_2})$
- V_g := $g \in R_{f_1 f_2}$ で定義される X 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束
- $g = f_1^{-m} f_2^{-n} \quad \Rightarrow \quad V_{m,n} := V_g \simeq \mathrm{Spec}\left(\mathrm{R}\left[\mathrm{s}, \mathrm{t}\right] / \left(\mathrm{f}_1^{\mathrm{m}}\mathrm{s} + \mathrm{f}_2^{\mathrm{n}}\mathrm{t} - 1\right)\right)$
- $\mathrm{S}_{\overline{g}} := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2_{\geqq 0} | \exists h \in R, \overline{h \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}} = \overline{g}\}$ は最小元をもつ **Lem 3.2.2**
- $\mathrm{P}(\overline{g}) := \min \mathrm{S}_{\overline{g}}$ は主 $\mathbb{G}_a$ 束の不変量 となる
- $\mathrm{P}(\overline{g}) = (m, n) \Leftrightarrow h \notin (f_1^m, f_2) \cup (f_1, f_2^n)$ $(g = h \cdot f_1^{-m} f_2^{-n})$ **Lem 3.2.3**

先行研究　X:準アフィン代数多様体の場合

Finston-Maubach'08

$R = \mathbb{C}[x, y, z]/(x^a + y^b + z^c)$,$f_1 = x,\ f_2 = y$ の時,

$V_{m,n} \simeq V_{m',n'} \Leftrightarrow (m, n) = (m', n')$

Dubouloz-Finston-Mehta'09

$R = \mathbb{C}[x, y],\ f_1 = x,\ f_2 = y$ の時,

$m + n = m' + n' \Rightarrow V_{m,n} \simeq V_{m',n'}$

Dubouloz-Finston'14

$R = \mathbb{C}[x, y],\ f_1 = x,\ f_2 = y$ の時,

$h, h' \in \mathbb{C}[x, y] \setminus ((x) \cup (y))$　　$\deg_x h < m, \deg_y h < n$

$\deg\ h = m + n - 2$　　$\deg\ h' < m' + n' - 2$

$\Rightarrow V_{h \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}} \not\simeq V_{h' \cdot f_1^{-m'} f_2^{-n'}}$

$(\rightarrow \exists h, h'$ s.t. $V_{h \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}} \not\simeq V_{h' \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}})$

Winkelmann'90, Finston-Jaradat'17

$\mathbb{A}^5$ は, アフィンでない準アフィン多様体上の主 $\mathbb{G}_a$ 束

主結果 2

論文 [22]
R. Kudou, *Zariski's cancellation problem for principal* $\mathbb{G}_a$*-bundles over non-*$\mathbb{A}^1$*-uniruled quasi-affine varieties*, Res. Math. **10** (2023), no. 1, Paper No. 2281061, 6. MR4672555

主結果 2

Theorem 3.4.3. (主 $\mathbb{G}_a$ 束が同型とならないための十分条件)

$\mathrm{Spec}(R)$: 非単線織アフィン代数多様体
(f_1, f_2): R-正則列かつ $(f_1), (f_2), (f_1, f_2)$: 素イデアル

$X = \mathrm{D}(f_1, f_2)$

m, n, m', n' : 自然数

$g = v \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}, \qquad g' = v' \cdot f_1^{-m'} f_2^{-n'} \qquad$ ただし, $f_1, f_2 \nmid v, v' \in R$

$\mathrm{P}\left(\overline{g'}\right) = (m', n')$

このとき,(1) または (2) が成り立てば $V_g \not\cong V_{g'}$:

(1) $m' > m + n - 1$ または $n' > m + n - 1$

(2) $m', n' \leqq m + n - 1$ かつ $v' \notin (f_1, f_2)^{m'+n'-m-n+\delta(v)}$, ただし

$$\delta(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \notin (f_1, f_2) \\ 1 & \text{if } v \in (f_1, f_2). \end{cases}$$

主結果と先行研究の比較 1

Corollary 3.4.4.

$\mathrm{Spec}(R)$: 非単線織アフィン代数多様体
(f_1, f_2): R-正則列かつ $(f_1), (f_2), (f_1, f_2)$: 素イデアル

このとき $V_{m,n} \times \mathbb{A}^1 \simeq V_{m',n'} \times \mathbb{A}^1$ だが、
もし $m + n \neq m' + n'$ ならば $V_{m,n} \not\simeq V_{m',n'}$

Finston-Maubach'08

$$R = \mathbb{C}[x, y, z]/(x^a + y^b + z^c)\ , f_1 = x,\ f_2 = y \text{ の時},$$
$$V_{m,n} \simeq V_{m',n'} \Leftrightarrow (m, n) = (m', n')$$

Dubouloz-Finston-Mehta'09

$$R = \mathbb{C}[x, y],\ f_1 = x,\ f_2 = y \text{ の時},$$
$$m + n = m' + n' \Rightarrow V_{m,n} \simeq V_{m',n'}$$

→**DFM'09 の結果の逆を $\mathrm{Spec}(R)$:非単線織の場合に示し反例を構成**

主結果と先行研究の比較 2

Corollary 3.4.5.

$\mathrm{Spec}(R)$: 非単線織アフィン代数多様体
(f_1, f_2): R-正則列かつ $(f_1), (f_2), (f_1, f_2)$: 素イデアル

m, n : 1 より大きい自然数
$\phi(X, Y) \in (X, Y) \setminus ((X) \cup (Y)) \subset \mathbb{C}[X, Y] \qquad (\deg_X \phi < m, \deg_Y \phi < n)$
このとき

- $V_{f_1^{-m} f_2^{-n}} \not\cong V_{\phi(f_1, f_2) \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}}$
- $V_{f_1^{-m} f_2^{-n}} \times \mathbb{A}^1 \simeq V_{\phi(f_1, f_2) \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}} \times \mathbb{A}^1$
- $\mathrm{P}\left(\overline{f_1^{-m} f_2^{-n}}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{\phi(f_1, f_2) \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}}\right) = (m, n)$

Dubouloz-Finston'14

$R = \mathbb{C}[x, y],\ f_1 = x,\ f_2 = y$ の時,
$h, h' \in R \setminus ((x)_R \cup (y)_R) \qquad \deg_x h < m, \deg_y h < n$
$\deg\ h = m + n - 2 \qquad \deg\ h' < m' + n' - 2$
$\Rightarrow V_{h \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}} \not\cong V_{h' \cdot f_1^{-m'} f_2^{-n'}}$ $(\rightarrow \exists h, h'$ s.t. $V_{h \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}} \not\cong V_{h' \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}})$

$\rightarrow$ **DF'14 の結果が $X = \mathrm{D}(f_1, f_2)$:非単線織 でも成立, 反例構成**

$X = \mathrm{D}(f_1, f_2)$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束のアフィン判定

Lemma 3.3.1.

X : 準アフィン代数多様体,　$\overline{g} \in \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$. このとき,

ある $b \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ が存在して $V_{b \cdot \overline{g}}$: アフィン $\Rightarrow$ $V_{\overline{g}}$:アフィン

Proposition 3.3.2.

R : 整域, f_1, f_2: 素元かつ R-正則列
m, n : 自然数
$g = v \cdot f_1^{-m} f_2^{-n}$ $(v \in R)$
このとき,

ある $\phi(x, y) \in R[x, y]$ が存在して $v = \phi(f_1, f_2)$ かつ, ある $(I, J) \in \mathrm{Min}(\phi)$ が存在して $(I, J) \prec (m, n)$ かつ $a_{IJ} \in R^*$

$$\Downarrow$$

$$V_g\text{:アフィン}$$

まとめ

- $X = Y_+ Z$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束を用いて新たな **ZCP** の反例を構成

  先行研究: 極の位数の違いを利用して反例構成
  主結果　: 極の位数が同じ場合でも反例が構成可能なことを示した

  - $X = Y_+ rZ$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束のアファイン判定法
  - $X = Y_+ rZ$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束の同型判定法

- $X = \mathrm{D}(f_1, f_2)$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束を用いて新たな **ZCP** の反例を構成

  主結果　: DFM'09 の結果の逆を X が非単線織の場合に示した
  DF'14 の結果が X が非単線織の場合でも成立

  - $X = \mathrm{D}(f_1, f_2)$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束 がアファインとなるための十分条件
  - $X = \mathrm{D}(f_1, f_2)$ 上の主 $\mathbb{G}_a$ 束 が同型とならないための十分条件