

学位論文の構成

表題: Families of rational curves and higher-dimensional algebraic geometry
(有理曲線族および高次元代数幾何)

1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究 (論文 [1])
2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究 (論文 [2])

研究の概要

以下, 多様体とは非特異な複素射影代数多様体とする.

1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

問題 1.1. 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が d 次超曲面で覆われているとき, X はどのような構造を持つか?

超曲面とは, 自身の線形包 (linear span) の中で余次元 1 の非特異射影多様体を表すものとする.

例 1.2 (自明な例). (i) 線形射影空間束 (射 $\varphi: X \rightarrow Y$: 各ファイバーが線形空間).

(ii) d 次超曲面束 (射 $\varphi: X \rightarrow Y$: 一般のファイバーが d 次超曲面).

事実 1.3 (知られている結果). n 次元多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が m 次元 d 次超曲面で覆われているとする.

(i) $d = 1$ のとき, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ ならば, X は線形射影空間束である. (E. Sato '97)

(ii) $d = 2$ のとき, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ ならば, X は線形射影空間束または 2 次超曲面束である. (M. C. Beltrametti and P. Ionescu '08)

(iii) $d = 3$ のとき, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$ ならば, X は線形射影空間束または 3 次超曲面束である. (K. Watanabe '12)

予想 1.4. n 次元多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が, 次元 $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + d$ の d 次超曲面で覆われているならば, X は線形射影空間束または d 次超曲面束である.

定理 1.5 (S). $d = 4$ の場合, 予想 1.4 は成立する.

予想 1.6 (R. Hartshorne '74). n 次元多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が, $n > \frac{2}{3}N$ を満たすならば, $X \subset \mathbb{P}^N$ は完全交叉である.

定理 1.7 (S). 予想 1.6 および次元に関する強い条件 $m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ を仮定すれば, 予想 1.4 は成立する.

2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

多様体 X とその上の豊富 (ample) な直線束 H の組 (X, H) を偏極多様体と呼ぶ. X 上の直線 C は, $(H, C) = e$ であるとき e 次曲線であるという. 特に, 1 次曲線は直線と呼ぶ.

問題 2.1. (X, H) を n 次元偏極多様体, $\mathcal{F}$ を X 上の e 次有理曲線の族とし, X は $\mathcal{F}$ に関して有理連結である (X の一般の二点が $\mathcal{F}$ に属す有理曲線で繋がれる) とする. このとき, (X, H) はどのような構造を持つか? 特に, 多様体 X のピカル数は?

多様体 X のピカル数 ρ_X とは, X 上の曲線が成す $\mathbb{R}$ -ベクトル空間 $N_1(X)$ の次元である.

事実 2.2 (知られている結果). (X, H) を e 次有理曲線族 $\mathcal{F}$ に関して有理連結な n 次元偏極多様体とする.

- (i) $e = 1$ のとき, $(X, H) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ である.
- (ii) $e = 2$ のとき, $\rho_X \leq 2$ である. さらに, $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(2))$ を除いては X は直線で覆われる. (S. Kebekus '02, P. Ionescu and F. Russo '10)
- (iii) $e = 3$ のとき, $\mathcal{F}$ が一般分裂ならば, $\rho_X \leq 3$ かつ X は直線で覆われる. また, X が直線で覆われていれば, $\rho_X \leq 3$ である. (G. Occhetta and V. Paterno '12)

有理曲線族 $\mathcal{F}$ が一般分裂であるとは, 一般の二点を固定した $\mathcal{F}$ の変形が次元を持つことをいう. この条件は $(-K_X \cdot \mathcal{F}) \geq n + 2$ と同値である.

注意 2.3. $e = 4$ のとき, $\mathcal{F}$ が一般分裂かつ X が直線で覆われていても, ρ_X には上限がない.

定理 2.4 (S). (X, H) を 4 次有理曲線族 $\mathcal{F}$ に関して有理連結な n 次元偏極多様体とする. $(-K_X \cdot \mathcal{F}) \geq n + 3$ ならば, 次のいずれかを満たす:

- (a) $\rho_X \leq 4$ かつ X は直線で覆われる;
- (b) X は 3 次有理曲線に関して有理連結である;
- (c) X の一般の二点は, 数値的に $\mathcal{F}$ の半分に同値な二つの 2 次曲線の鎖で繋がれる.

注意 2.5. 定理 2.4 の仮定の下でも, ρ_X には上限がない.

定理 2.6 (S). (X, H) を 4 次有理曲線族 $\mathcal{F}$ に関して有理連結な偏極曲面とする.

- (i) X が直線で覆われるとき, (X, H) は次のいずれかと同型である:

$$\begin{aligned} &(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1)); \\ &(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1, 3)); (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1, 2)); (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1, 1)); \\ &(\mathbb{F}_1, C_0 + 4f); (\mathbb{F}_1, C_0 + 3f); (\mathbb{F}_1, C_0 + 2f); \\ &(\mathbb{F}_2, C_0 + 4f); (\mathbb{F}_2, C_0 + 3f); \\ &(\mathbb{F}_3, C_0 + 4f). \end{aligned}$$

ここで, $\mathbb{F}_\epsilon$ は線織曲面 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-\epsilon))$, C_0 はその上の極小切断, f はそのファイバーである.

- (ii) X が直線で覆われず $\mathcal{F}$ が一般分裂のとき, (X, H) は次のいずれかと同型である:

$$(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)); (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2, 2)); (S_k, -K_{S_k}), 2 \leq k \leq 8.$$

ここで, S_k は $\mathbb{P}^2$ の一般の k 点におけるブローアップである.

- (iii) X が直線で覆われず $\mathcal{F}$ が一般非分裂のとき, (X, H) は次のいずれかと同型である:

$$\begin{aligned} &(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(4)); (T_k, 4L - E_1 - \cdots - E_k), 1 \leq k \leq 15; (T_k, 4L - 2E_1 - E_2 - \cdots - E_k), 1 \leq k \leq 12; \\ &(\tilde{T}_k, 4\tilde{L} - 3\tilde{E} - 2\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 - \cdots - \tilde{E}_k), 1 \leq k \leq 11. \end{aligned}$$

ここで, T_k は $\mathbb{P}^2$ の k 点におけるブローアップ, $\tilde{T}_k$ は T_k の E_1 上の点におけるブローアップである.

研究業績

1 論文

出版論文

- [1] Taku Suzuki, On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces, Journal of Pure and Applied Algebra. (掲載決定)
- [2] Taku Suzuki, On the Picard number of rationally quartic connected manifolds, International Journal of Mathematics. (掲載決定)

プレプリント

- [3] Taku Suzuki, Characterizations of projective spaces and hyperquadrics for varieties with Picard number one. (2011 年 11 月, 未発表)

報告集

- [4] 鈴木拓, 高次元の超曲面で覆われる多様体, Fano 多様体の最近の進展 (2013)・数理解析研究所講究録 No.1897, pp.83-90.

2 研究発表

研究集会における口頭発表

- 1. 鈴木拓, On the Picard number of rationally quartic connected manifolds, Younger generations in algebraic and complex geometry III, 長崎市松藤プラザ, 2014 年 1 月 8 日. (英語)
- 2. 鈴木拓, On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces, Fano 多様体の最近の進展, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 12 月 17 日. (日本語)
- 3. 鈴木拓, Rationally quartic connected manifolds, Mini workshop on birational geometry, 東京大学大学院数理解析研究科, 2013 年 11 月 22 日. (英語)
- 4. 鈴木拓, On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces, 第 12 回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学, 2013 年 9 月 6 日. (英語)
- 5. Taku Suzuki, On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces, Japanese-Spanish Workshop, Imperial College London, 2013 年 7 月 12 日. (英語)

セミナーにおける口頭発表

6. 鈴木拓, Characterizations of projective spaces and hyperquadrics, 代数幾何学セミナー, 九州大学大学院数理学研究院, 2012 年 11 月 8 日. (日本語)
7. 鈴木拓, Characterizations of projective spaces and hyperquadrics, 代数幾何講演会, 埼玉大学理工学研究科, 2012 年 5 月 22 日. (日本語)
8. 鈴木拓, Characterizations of projective spaces and hyperquadrics, 代数幾何学セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科, 2012 年 5 月 21 日. (日本語)

3 その他 (受賞歴等)

日本学術振興会特別研究員 (DC2), 2013 年 4 月 ~ .