# Families of rational curves and higher-dimensional algebraic geometry

鈴木 拓

早稲田大学大学院基幹理工学研究科
数学応用数理専攻
楫研究室

2014 年 11 月 7 日

# 内容

1. 業績
2. 学位論文の構成
3. 研究概要

## 出版論文

1. Taku Suzuki, On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces, Journal of Pure and Applied Algebra. (掲載決定)
2. Taku Suzuki, On the Picard number of rationally quartic connected manifolds, International Journal of Mathematics. (掲載決定)

## プレプリント

3. Taku Suzuki, Characterizations of projective spaces and hyperquadrics for varieties with Picard number one. (2011 年 11 月, 未発表) ※修士論文

# 学位論文の構成

## 表題

Families of rational curves and higher-dimensional algebraic geometry.

(有理曲線族および高次元代数幾何)

# 学位論文の構成

**表題**

Families of rational curves and higher-dimensional algebraic geometry.

(有理曲線族および高次元代数幾何)

**構成**

1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究 (論文 [1])
2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究 (論文 [2])

# 学位論文の構成

表題

Families of rational curves and higher-dimensional algebraic geometry.

(有理曲線族および高次元代数幾何)

構成

1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究 (論文 [1])
2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究 (論文 [2])

- 多様体: 非特異な複素射影代数多様体.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ について考える.

最も単純なもの: 線形空間.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ について考える.

最も単純なもの: 線形空間.

**問題**

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が線形空間で覆われているとき, $X$ はどのような構造を持つか？

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ について考える.

最も単純なもの: 線形空間.

**問題**

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が線形空間で覆われているとき, $X$ はどのような構造を持つか？

- $X$ が〜で覆われている
  $\iff$ $X$ の一般の (general) 点を通る〜が $X$ 内にある.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ について考える.

最も単純なもの: 線形空間.

**問題**

多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が線形空間で覆われているとき, $X$ はどのような構造を持つか？

- $X$ が〜で覆われている
  $\iff$ $X$ の一般の (general) 点を通る〜が $X$ 内にある.
- $n$: 多様体 $X$ の次元,
  $m$: 覆う線形空間の次元 (最大の次元).

$n = 2$ の場合

**例**

$n = 2$ の場合

**例**

- $X = \mathbb{P}^2$. $(m = 2)$

$n = 2$ の場合

**例**

- $X = \mathbb{P}^2$. $(m = 2)$
- 線織曲面 (ruled surface)
  射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが直線, $Y$: 曲線. $(m = 1)$

$n$: 一般の場合

**例 (自明なもの)**

線形射影空間束

射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間.

$n$: 一般の場合

**例 (自明なもの)**

線形射影空間束
射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間.

- $Y$:一点 ($X = \mathbb{P}^n$) のとき, $m = n$.

# (1) 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

## $n$: 一般の場合

### 例 (自明なもの)

線形射影空間束
射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間.

- $Y$:一点 $(X = \mathbb{P}^n)$ のとき, $m = n$.
- $\dim Y = k$ のとき, $m = n - k$.

## $n$: 一般の場合

### 例 (自明なもの)

線形射影空間束
射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間.

- $Y$:一点 ($X = \mathbb{P}^n$) のとき, $m = n$.
- $\dim Y = k$ のとき, $m = n - k$.

### 例 (非自明なもの)

- $2m$ 次元の 2 次超曲面 $Q_{2m} \subset \mathbb{P}^{2m+1}$
  $\cdots m$ 次元線形空間で覆われる.
- $2m$ 次元グラスマン多様体 $G(2, m+2) \subset \mathbb{P}^N$
  $\cdots m$ 次元線形空間で覆われる.

etc.

# (1) 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

## $n$: 一般の場合

**例 (自明なもの)**

線形射影空間束
射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間. ($1 \leq m \leq n$)

- $Y$:一点 ($X = \mathbb{P}^n$) のとき, $m = n$.
- $\dim Y = k$ のとき, $m = n - k$.

**例 (非自明なもの)**

- $2m$ 次元の 2 次超曲面 $Q_{2m} \subset \mathbb{P}^{2m+1}$
  $\cdots m$ 次元線形空間で覆われる.
- $2m$ 次元グラスマン多様体 $G(2, m+2) \subset \mathbb{P}^N$
  $\cdots m$ 次元線形空間で覆われる.

etc.

# (1) 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

## $n$: 一般の場合

**例 (自明なもの)**

線形射影空間束
射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間. $(1 \leq m \leq n)$

- $Y$:一点 $(X = \mathbb{P}^n)$ のとき, $m = n$.
- $\dim Y = k$ のとき, $m = n - k$.

**例 (非自明なもの)**

- $2m$ 次元の 2 次超曲面 $Q_{2m} \subset \mathbb{P}^{2m+1}$
  $\cdots m$ 次元線形空間で覆われる. $(m = \frac{n}{2})$
- $2m$ 次元グラスマン多様体 $G(2, m+2) \subset \mathbb{P}^N$
  $\cdots m$ 次元線形空間で覆われる. $(m = \frac{n}{2})$

etc.

非自明な例: $m$ は $n$ と比べて小さい.

**事実 (E. Sato '97)**

$n$ 次元多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が次元 $m \geq [\frac{n}{2}] + 1$ の線形空間で覆われているならば, $X$ は線形射影空間束.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

拡張

線形空間 $\longrightarrow$ 超曲面.

**問題 1.1**

与えられた $d$ に対して, 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が $d$ 次超曲面で覆われているとき, $X$ はどのような構造を持つか？

拡張

線形空間 $\longrightarrow$ 超曲面.

**問題 1.1**

与えられた $d$ に対して, 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が $d$ 次超曲面で覆われているとき, $X$ はどのような構造を持つか？

- 超曲面:
  自身の linear span の中で余次元 1 の非特異射影多様体.

拡張

線形空間 $\longrightarrow$ 超曲面.

**問題 1.1**

与えられた $d$ に対して, 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が $d$ 次超曲面で覆われているとき, $X$ はどのような構造を持つか？

- 超曲面:
  自身の linear span の中で余次元 1 の非特異射影多様体.
- $n$: 多様体 $X$ の次元,
  $m$: 覆う $d$ 次超曲面の次元 (最大の次元).

### 例 (自明なもの)

**例 (自明なもの)**

1. 線形空間. ($m = n - 1$)

**例 (自明なもの)**

1. 線形空間. ($m = n - 1$)
2. $d$ 次超曲面. ($m = n$)

**例 (自明なもの)**

1. 線形空間. ($m = n - 1$)
2. $d$ 次超曲面. ($m = n$)

↓ 一般化

**例 1.2 (自明なもの)**

1. 線形射影空間束
   射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

**例 (自明なもの)**

1. 線形空間. ($m = n - 1$)
2. $d$ 次超曲面. ($m = n$)

↓ 一般化

**例 1.2 (自明なもの)**

1. 線形射影空間束
   射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間.
2. $d$ 次超曲面束
   射 $\varphi : X \to Y$: 一般のファイバーが $d$ 次超曲面.

**例 (自明なもの)**

1. 線形空間. ($m = n - 1$)
2. $d$ 次超曲面. ($m = n$)

$\downarrow$ 一般化

**例 1.2 (自明なもの)**

1. 線形射影空間束
射 $\varphi : X \to Y$: 各ファイバーが線形空間. ($1 \leq m \leq n - 1$)
2. $d$ 次超曲面束
射 $\varphi : X \to Y$: 一般のファイバーが $d$ 次超曲面. ($1 \leq m \leq n$)

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

**例 (非自明なもの, $d = 2$ のとき)**

- 6 次元グラスマン多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$
  $\cdots$4 次元の 2 次超曲面で覆われる.
- 10 次元スピノル多様体 $S_{10} \subset \mathbb{P}^{15}$
  $\cdots$6 次元の 2 次超曲面で覆われる.

  etc.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

**例 (非自明なもの, $d = 2$ のとき)**

- 6 次元グラスマン多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$
  $\cdots$4 次元の 2 次超曲面で覆われる. $(m = \frac{n}{2} + 1)$
- 10 次元スピノル多様体 $S_{10} \subset \mathbb{P}^{15}$
  $\cdots$6 次元の 2 次超曲面で覆われる. $(m = \frac{n}{2} + 1)$

  etc.

非自明な例: $m$ は $n$ と比べて小さい.

**例 (非自明なもの, $d = 2$ のとき)**

- 6 次元グラスマン多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$
  $\cdots$4 次元の 2 次超曲面で覆われる. ($m = \frac{n}{2} + 1$)
- 10 次元スピノル多様体 $S_{10} \subset \mathbb{P}^{15}$
  $\cdots$6 次元の 2 次超曲面で覆われる. ($m = \frac{n}{2} + 1$)
  etc.

非自明な例: $m$ は $n$ と比べて小さい.

$\downarrow$

$m$ が $n$ と比べてある程度大きければ, 自明なものしかない？

**事実 1.3 (知られている結果)**

$d=2$ (M. C. Beltrametti and P. Ionescu '08)

$m \geq [\frac{n}{2}]+2$ ならば, $X$ は線形射影空間束または 2 次超曲面束.

**事実 1.3 (知られている結果)**

$d = 2$ (M. C. Beltrametti and P. Ionescu '08)

$m \geq [\frac{n}{2}] + 2$ ならば, $X$ は線形射影空間束または 2 次超曲面束.

$d = 3$ (K. Watanabe '12)

$m \geq [\frac{n}{2}] + 3$ ならば, $X$ は線形射影空間束または 3 次超曲面束.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

**事実 1.3 (知られている結果)**

$d = 1$ (E. Sato '97)

$m \geq [\frac{n}{2}] + 1$ ならば, $X$ は線形射影空間束.

$d = 2$ (M. C. Beltrametti and P. Ionescu '08)

$m \geq [\frac{n}{2}] + 2$ ならば, $X$ は線形射影空間束または 2 次超曲面束.

$d = 3$ (K. Watanabe '12)

$m \geq [\frac{n}{2}] + 3$ ならば, $X$ は線形射影空間束または 3 次超曲面束.

**予想 1.4**

$d$:一般の場合

$m \geq [\frac{n}{2}] + d$ ならば, $X$ は線形射影空間束または $d$ 次超曲面束.

# 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

**予想 1.4**

<u>$d$:一般の場合</u>

$m \geq [\frac{n}{2}] + d$ ならば, $X$ は線形射影空間束または $d$ 次超曲面束.

<u>申請者の研究</u> 予想 1.4

- $d = 4$ の場合.
- 一般次数の場合.

$d = 4$ の場合

**定理 1.5 (S)**

$d = 4$ の場合, 予想 1.4 は成立する.

一般次数の場合

**予想 1.6 (R. Hartshorne '74)**

$n$ 次元多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ は, $n > \frac{2}{3}N$ ならば完全交叉である.

一般次数の場合

**予想 1.6 (R. Hartshorne '74)**

$n$ 次元多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ は, $n > \frac{2}{3}N$ ならば完全交叉である.

**定理 1.7 (S)**

予想 1.6 および次元に関する強い条件 $m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ を仮定すれば, 予想 1.4 は成立する.

**証明の鍵**

多様体の VMRT の構造を調べる.

- $X$: $n$ 次元多様体, $p$: $X$ の一般の点, $\mathscr{L}$: $X$ 上の直線の被覆族に対して,

$$V(X) = V_{p,\mathscr{L}}(X) := \{L \in \mathscr{L} \mid p \in L\} \subset \mathbb{P}(T_pX) = \mathbb{P}^{n-1}$$

を VMRT(variety of minimal rational tangents) とよぶ.

**証明の鍵**

多様体の VMRT の構造を調べる.

- $X$: $n$ 次元多様体, $p$: $X$ の一般の点, $\mathscr{L}$: $X$ 上の直線の被覆族に対して,

$$V(X) = V_{p,\mathscr{L}}(X) := \{L \in \mathscr{L} \mid p \in L\} \subset \mathbb{P}(T_pX) = \mathbb{P}^{n-1}$$

を VMRT(variety of minimal rational tangents) とよぶ.

**例**

- $X$: 線形空間のとき, $V(X) = \mathbb{P}^{n-1}$.

**証明の鍵**

多様体の VMRT の構造を調べる.

- $X$: $n$ 次元多様体, $p$: $X$ の一般の点, $\mathscr{L}$: $X$ 上の直線の被覆族に対して,

$$V(X) = V_{p,\mathscr{L}}(X) := \{L \in \mathscr{L} \mid p \in L\} \subset \mathbb{P}(T_pX) = \mathbb{P}^{n-1}$$

を VMRT(variety of minimal rational tangents) とよぶ.

**例**

- $X$: 線形空間のとき, $V(X) = \mathbb{P}^{n-1}$.
- $X$: 2 次超曲面のとき, $V(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$: 2 次超曲面.

# 1. 証明の概略

**証明の鍵**

多様体の VMRT の構造を調べる.

- $X$: $n$ 次元多様体, $p$: $X$ の一般の点, $\mathscr{L}$: $X$ 上の直線の被覆族に対して,

$$V(X) = V_{p,\mathscr{L}}(X) := \{L \in \mathscr{L} \mid p \in L\} \subset \mathbb{P}(T_pX) = \mathbb{P}^{n-1}$$

を VMRT(variety of minimal rational tangents) とよぶ.

**例**

- $X$: 線形空間のとき, $V(X) = \mathbb{P}^{n-1}$.
- $X$: 2 次超曲面のとき, $V(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$: 2 次超曲面.
- $X$: $d$ 次超曲面 $(n \geq d)$ のとき,
  $V(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$: $(2, 3, \ldots, d)$ 型完全交叉.

# 1. 証明の概略

$m \geq [\frac{n}{2}] + d$ (予想 1.4 の条件) を仮定.

# 1. 証明の概略

$m \geq [\frac{n}{2}] + d$ (予想 1.4 の条件) を仮定.

概略

$S \subset X$: 高次元 $d$ 次超曲面

$\to V(S)$: 高次元

# 1. 証明の概略

$m \geq [\frac{n}{2}] + d$ (予想 1.4 の条件) を仮定.

概略

$S \subset X$: 高次元 $d$ 次超曲面

$\to V(S)$: 高次元

$\to V(X)$: 高次元.

# 1. 証明の概略

$m \geq [\frac{n}{2}] + d$ (予想 1.4 の条件) を仮定.

**概略**

$S \subset X$: 高次元 $d$ 次超曲面

$\to V(S)$: 高次元

$\to V(X)$: 高次元.

**事実 (M. C. Beltrametti, A. J. Sommese, J. A. Wiśniewski '92)**

$\dim V(X) \geq [\frac{n}{2}]$ ならば,

- extremal contraction $\varphi : X \to Y$ が存在,
- $\varphi$ の一般のファイバー $F$ は, $\mathrm{Pic}\, F = \mathbb{Z}\langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_F \rangle$ なる Fano 多様体 ($-K_F$ が豊富).

ファイバー $F$ が線形空間 or $d$ 次超曲面になることを示せばよい.

# 1. 証明の概略

概略

$F$ も $m$ 次元 $d$ 次超曲面 $S$ で覆われる

概略

$F$ も $m$ 次元 $d$ 次超曲面 $S$ で覆われる

$\to V(F)$: 高次元

概略

$F$ も $m$ 次元 $d$ 次超曲面 $S$ で覆われる

$\to$ $V(F)$: 高次元

**事実 (VMRT の性質)**

$F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle \mathscr{O}(1)\rangle$ のとき, $\dim V(F) = i_F - 2$.

- $i_F$: Fano 指数 (index) $\iff$ $-K_F = \mathscr{O}(i_F)$.

# 1. 証明の概略

概略

$F$ も $m$ 次元 $d$ 次超曲面 $S$ で覆われる

$\to V(F)$: 高次元

$\to i_F$: 大きい.

**事実 (VMRT の性質)**

$F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle \mathscr{O}(1) \rangle$ のとき, $\dim V(F) = i_F - 2$.

- $i_F$: Fano 指数 (index) $\iff -K_F = \mathscr{O}(i_F)$.

# 1. 証明の概略

概略

$F$ も $m$ 次元 $d$ 次超曲面 $S$ で覆われる

$\to V(F)$: 高次元

$\to i_F \geq k - d + 2$. ($k := \dim F$)

**事実 (VMRT の性質)**

$F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle\mathscr{O}(1)\rangle$ のとき, $\dim V(F) = i_F - 2$.

- $i_F$: Fano 指数 (index) $\iff -K_F = \mathscr{O}(i_F)$.

$d = 4$ の場合

$\rightarrow i_F \geq k - 2.$

# 1. 証明の概略

$d = 4$ の場合

$\to i_F \geq k - 2.$

**事実 (高い指数を持つ Fano 多様体の分類)**

$i_F \leq k + 1.$

- $i_F = k + 1$ ならば, $F \cong \mathbb{P}^k$ (S. Kobayashi, T. Ochiai '73).
- $i_F = k$ ならば, $F$: 2 次超曲面 (S. Kobayashi, T. Ochiai '73).
- $i_F = k - 1$ ならば, $F$: 3 種類 (T. Fujita '80, '81).
- $i_F = k - 2$ ならば, $F$: 8 種類 (S. Mukai '89).

$d = 4$ の場合

$\rightarrow i_F \geq k - 2.$

**事実 (高い指数を持つ Fano 多様体の分類)**

$i_F \leq k + 1.$

- $i_F = k + 1$ ならば, $F \cong \mathbb{P}^k$ (S. Kobayashi, T. Ochiai '73).
- $i_F = k$ ならば, $F$: 2 次超曲面 (S. Kobayashi, T. Ochiai '73).
- $i_F = k - 1$ ならば, $F$: 3 種類 (T. Fujita '80, '81).
- $i_F = k - 2$ ならば, $F$: 8 種類 (S. Mukai '89).

$\rightarrow F$ は線形空間 or 4 次超曲面.

## 一般次数の場合

$m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ (定理 1.7 の条件) を仮定.

# 1. 証明の概略

一般次数の場合

$m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ (定理 1.7 の条件) を仮定.

$F$: 線形空間 or 超曲面 $(\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq 1)$ を示したい.

一般次数の場合

$m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ (定理 1.7 の条件) を仮定.

$F$: 線形空間 or 超曲面 ($\operatorname{codim}_{\langle F\rangle} F \leq 1$) を示したい.

$\uparrow$ [Zak]

$\operatorname{codim}_{\langle F\rangle} F$: ある程度小さい.

**事実 (F. L. Zak '93)**

$Z \subset X \subset \mathbb{P}^N$, $\dim Z \geq \frac{N+1}{2}$, $Z$: 超曲面ならば,

$X$: 線形空間 or 超曲面

一般次数の場合

$m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ (定理 1.7 の条件) を仮定.

$F$: 線形空間 or 超曲面 ($\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq 1$) を示したい.

$\uparrow$ [Zak]

$\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq \frac{k}{3}$ ($k := \dim F$).

**事実 (F. L. Zak '93)**

$Z \subset X \subset \mathbb{P}^N$, $\dim Z \geq \frac{N+1}{2}$, $Z$: 超曲面ならば,

$X$: 線形空間 or 超曲面

## 一般次数の場合

$m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ (定理 1.7 の条件) を仮定.

$F$: 線形空間 or 超曲面 ($\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq 1$) を示したい.

$\uparrow$ [Zak]

$\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq \frac{k}{3}$ ($k := \dim F$).

**示したいこと**

$\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F$ が小さい.

一般次数の場合

$m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ (定理 1.7 の条件) を仮定.

$F$: 線形空間 or 超曲面 ($\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq 1$) を示したい.

$\uparrow$ [Zak]

$\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F \leq \frac{k}{3}$ ($k := \dim F$).

**示したいこと**

$\mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F$ が小さい.

$\dim V(F) > \frac{2(k-1)}{3}$

$\downarrow$ Hartshorn 予想

$V(F) \subset \mathbb{P}^{k-1}$: 完全交叉.

**事実 (J. M. Hwang, S. Kebekus '05 and F. Russo '09)**

$\mathbb{P}(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 上の線形系 $\Sigma$ が存在し, 次を満たす:

- $\Sigma \subset |\mathscr{O}(2)|$,
- $V(F) \subset \mathrm{Base}(\Sigma) \subset \mathbb{P}^{k-1}$.

さらに, $F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle \mathscr{O}(1) \rangle$, $i_F > \frac{2k}{3}$ ならば,

$\dim \Sigma = \mathrm{codim}_{\langle F \rangle} F - 1$.

**事実 (J. M. Hwang, S. Kebekus '05 and F. Russo '09)**

$\mathbb{P}(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 上の線形系 $\Sigma$ が存在し, 次を満たす:

- $\Sigma \subset |\mathscr{O}(2)|$,
- $V(F) \subset \underbrace{\mathrm{Base}(\Sigma)}_{\mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F\ \text{個の 2 次超曲面の交叉}} \subset \mathbb{P}^{k-1}$.

さらに, $F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle\mathscr{O}(1)\rangle$, $i_F > \frac{2k}{3}$ ならば,

$\dim\Sigma = \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F - 1$.

# 1. 証明の概略

**事実 (J. M. Hwang, S. Kebekus '05 and F. Russo '09)**

$\mathbb{P}(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 上の線形系 $\Sigma$ が存在し, 次を満たす:

- $\Sigma \subset |\mathscr{O}(2)|$,
- $V(F) \subset \underbrace{\mathrm{Base}(\Sigma)}_{\mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F \text{ 個の 2 次超曲面の交叉}} \subset \mathbb{P}^{k-1}$.

さらに, $F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle\mathscr{O}(1)\rangle$, $i_F > \frac{2k}{3}$ ならば,

$\dim\Sigma = \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F - 1$.

**補題**

$X \subset W \subset \mathbb{P}^N$, $X$: 完全交叉, $W$: $r$ 個の 2 次超曲面の交叉ならば,

$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X \geq r$.

**事実 (J. M. Hwang, S. Kebekus '05 and F. Russo '09)**

$\mathbb{P}(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 上の線形系 $\Sigma$ が存在し, 次を満たす:

- $\Sigma \subset |\mathscr{O}(2)|$,
- $V(F) \subset \underbrace{\mathrm{Base}(\Sigma)}_{\mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F\ \text{個の 2 次超曲面の交叉}} \subset \mathbb{P}^{k-1}$.

さらに, $F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle \mathscr{O}(1)\rangle$, $i_F > \frac{2k}{3}$ ならば,

$$\dim \Sigma = \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F - 1.$$

**補題**

$X \subset W \subset \mathbb{P}^N$, $X$: 完全交叉, $W$: $r$ 個の 2 次超曲面の交叉ならば,

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X \geq r.$$

$$\rightarrow \qquad \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{k-1}} V(F) \geq \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F.$$

**事実 (J. M. Hwang, S. Kebekus '05 and F. Russo '09)**

$\mathbb{P}(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 上の線形系 $\Sigma$ が存在し, 次を満たす:

- $\Sigma \subset |\mathscr{O}(2)|$,
- $V(F) \subset \underline{\mathrm{Base}(\Sigma)} \subset \mathbb{P}^{k-1}$.
  $\mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F$ 個の 2 次超曲面の交叉

さらに, $F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle\mathscr{O}(1)\rangle$, $i_F > \frac{2k}{3}$ ならば,

$\dim\Sigma = \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F - 1$.

**補題**

$X \subset W \subset \mathbb{P}^N$, $X$: 完全交叉, $W$: $r$ 個の 2 次超曲面の交叉ならば,

$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X \geq r$.

$\rightarrow \frac{k}{3} > \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{k-1}} V(F) \geq \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F$.

# 1. 証明の概略

**事実 (J. M. Hwang, S. Kebekus '05 and F. Russo '09)**

$\mathbb{P}(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 上の線形系 $\Sigma$ が存在し, 次を満たす:

- $\Sigma \subset |\mathscr{O}(2)|$,
- $V(F) \subset \underline{\mathrm{Base}(\Sigma)} \subset \mathbb{P}^{k-1}$.

  $\mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F$ 個の 2 次超曲面の交叉

さらに, $F$: Fano, $\mathrm{Pic}(F) = \mathbb{Z}\langle \mathscr{O}(1)\rangle$, $i_F > \frac{2k}{3}$ ならば,

$\dim \Sigma = \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F - 1$.

**補題**

$X \subset W \subset \mathbb{P}^N$, $X$: 完全交叉, $W$: $r$ 個の 2 次超曲面の交叉ならば,

$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X \geq r$.

$\to \frac{k}{3} > \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{k-1}} V(F) \geq \mathrm{codim}_{\langle F\rangle} F$.

$\to F$: 線形空間 or 超曲面.

**セッティング**

$(X, H)$: 偏極多様体 ($H$: $X$ 上の豊富な直線束).

**セッティング**

$(X, H)$: 偏極多様体 ($H$: $X$ 上の豊富な直線束).

$X$ 上の曲線 $C$ が

- 直線 $\iff$ $(H.C) = 1$.
- 2 次曲線 $\iff$ $(H.C) = 2$.
- 3 次曲線 $\iff$ $(H.C) = 3$.

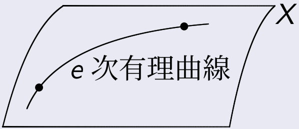
$\vdots$

### セッティング

- $(X, H)$: $n$ 次元偏極多様体.
- $\mathscr{F}$: $X$ 上の $e$ 次有理曲線の族.

## セッティング

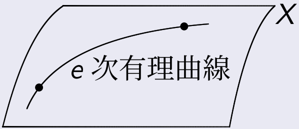
- $(X, H)$: $n$ 次元偏極多様体.
- $\mathscr{F}$: $X$ 上の $e$ 次有理曲線の族.
- $X$ は $\mathscr{F}$ に関して有理連結である (一般の二点が $\mathscr{F}$ に属す曲線で繋ぐことができる).



# 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

**セッティング ($e$ 次有理連結)**

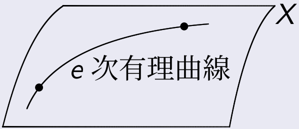
- $(X, H)$: $n$ 次元偏極多様体.
- $\mathscr{F}$: $X$ 上の $e$ 次有理曲線の族.
- $X$ は $\mathscr{F}$ に関して有理連結である (一般の二点が $\mathscr{F}$ に属す曲線で繋ぐことができる).



# 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

**セッティング ($e$ 次有理連結)**

- $(X, H)$: $n$ 次元偏極多様体.
- $\mathscr{F}$: $X$ 上の $e$ 次有理曲線の族.
- $X$ は $\mathscr{F}$ に関して有理連結である (一般の二点が $\mathscr{F}$ に属す曲線で繋ぐことができる).




**問題 2.1**

与えられた $e$ に対して, $e$ 次有理連結な偏極多様体の構造は？
特に, 多様体のピカール数は？

- ピカール数 $\rho_X$:
  $X$ 上の曲線の数値的類が成すベクトル空間 $N_1(X)$ の次元.

**例 ($e$ 次有理連結な多様体)**

**例 ($e$ 次有理連結な多様体)**

- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$.

**例 ($e$ 次有理連結な多様体)**

- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(e))$.

**例 ($e$ 次有理連結な多様体)**

- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(e))$.
- $(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_e}, \mathscr{O}(1, \ldots, 1))$.

# 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

**例 ($e$ 次有理連結な多様体)**

- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(e))$.
- $(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_e}, \mathscr{O}(1, \ldots, 1))$.
- $(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}, \mathscr{O}(h_1, \ldots, h_k))$, $1 \leq k \leq e$, $\sum h_i = e$.

# 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

**例 ($e$ 次有理連結な多様体)**

- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(e))$.
- $(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_e}, \mathscr{O}(1, \ldots, 1))$.
- $(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}, \mathscr{O}(h_1, \ldots, h_k))$, $1 \leq k \leq e$, $\sum h_i = e$.

- ピカール数 1〜$e$ の自明な $e$ 次有理連結多様体がある.

**事実 2.2 (知られている結果)**

$e = 1$

- $(X, H) \cong (\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$ (特に $\rho_X = 1$).

**事実 2.2 (知られている結果)**

$e = 1$

- $(X, H) \cong (\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$ (特に $\rho_X = 1$).

$e = 2$ (S. Kebekus '02, P. Ionescu and F. Russo '10)

- $\rho_X \leq 2$.

**事実 2.2 (知られている結果)**

$e = 1$

- $(X, H) \cong (\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$ (特に $\rho_X = 1$).

$e = 2$ (S. Kebekus '02, P. Ionescu and F. Russo '10)

- $\rho_X \leq 2$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(2))$ を除いては, $X$ は直線で覆われる.

事実 2.2 (知られている結果)

$e=1$

- $(X,H)\cong(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}(1))$ (特に $\rho_X=1$).

$e=2$ (S. Kebekus '02, P. Ionescu and F. Russo '10)

- $\rho_X\le 2$.
- $(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}(2))$ を除いては, $X$ は直線で覆われる.

$e=3$ (G. Occhetta and V. Paterno '12)

- $\rho_X$ に上限はない.

**事実 2.2 (知られている結果)**

$e = 1$

- $(X, H) \cong (\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$ (特に $\rho_X = 1$).

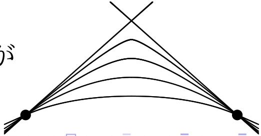
$e = 2$ (S. Kebekus '02, P. Ionescu and F. Russo '10)

- $\rho_X \leq 2$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(2))$ を除いては, $X$ は直線で覆われる.

$e = 3$ (G. Occhetta and V. Paterno '12)

- $\rho_X$ に上限はない.
- $\mathscr{F}$ が一般分裂ならば, $\rho_X \leq 3$ かつ $X$ は直線で覆われる.

- $\mathscr{F}$ が一般分裂 (not generically unsplit)
  $\iff$ 一般の二点を固定した $\mathscr{F}$ の変形が次元を持つ.



## 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

**事実 2.2 (知られている結果)**

$e = 1$

- $(X, H) \cong (\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1))$ (特に $\rho_X = 1$).

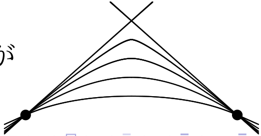
$e = 2$ (S. Kebekus '02, P. Ionescu and F. Russo '10)

- $\rho_X \leq 2$.
- $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(2))$ を除いては, $X$ は直線で覆われる.

$e = 3$ (G. Occhetta and V. Paterno '12)

- $\rho_X$ に上限はない.
- $\mathscr{F}$ が一般分裂ならば, $\rho_X \leq 3$ かつ $X$ は直線で覆われる.
- $X$ が直線で覆われていれば, $\rho_X \leq 3$.

- $\mathscr{F}$ が一般分裂 (not generically unsplit) $\iff$ 一般の二点を固定した $\mathscr{F}$ の変形が次元を持つ.



申請者の研究

これまでに知られていない $e = 4$ の場合.

申請者の研究

これまでに知られていない $e = 4$ の場合.

- ピカール数の上限に関する研究.
- 曲面 $(n = 2)$ の場合に関する研究.

## ピカール数の上限

事実 2.2

- $e = 1 \Longrightarrow \rho_X = 1.$
- $e = 2 \Longrightarrow \rho_X \leq 2.$
- $e = 3$, $\mathscr{F}$ が一般分裂 or $X$ が直線で覆われる $\Longrightarrow \rho_X \leq 3.$

**問題**

$e = 4$ のとき, $\rho_X \leq 4$ であるための十分条件は？

## ピカール数の上限

事実 2.2

- $e = 1 \Longrightarrow \rho_X = 1.$
- $e = 2 \Longrightarrow \rho_X \leq 2.$
- $e = 3$, $\mathscr{F}$ が一般分裂 or $X$ が直線で覆われる $\Longrightarrow \rho_X \leq 3.$

**問題**

$e = 4$ のとき, $\rho_X \leq 4$ であるための十分条件は？

**注意 2.3**

$e = 4$ のとき, $\mathscr{F}$ が一般分裂かつ $X$ が直線で覆われていても, $\rho_X$ には上限がない.

**注意 2.3**

$e = 4$ のとき, $\mathscr{F}$ が一般分裂かつ $X$ が直線で覆われていても, $\rho_X$ には上限がない.

**例**

- $\varphi : Y \to \mathbb{P}^r$: $k$ 点 $P_1, \ldots, P_k$ でのブローアップ $(k \le \binom{r+3}{3} - 2r - 2)$,
- $X := Y \times \mathbb{P}^s$,
- $H := p_1^*\{\varphi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(3) - \sum_{i=1}^{k} \varphi^{-1}(P_i)\} + p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^s}(1)$.

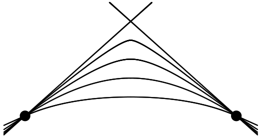
このとき,

- $(X, H)$ は一般分裂な 4 次有理曲線族 $\mathscr{F}$ に関して有理連結.
- $X$ は直線で覆われる.
- $\rho_X = k + 2$.

**注意 2.3**

$e = 4$ のとき, $\mathscr{F}$ が一般分裂かつ $X$ が直線で覆われていても, $\rho_X$ には上限がない.

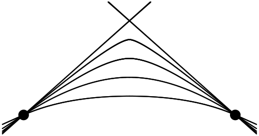
- $\mathscr{F}$ が一般分裂
  $\iff$ 一般の二点を固定した $\mathscr{F}$ の変形が次元を持つ,



**注意 2.3**

$e=4$ のとき, $\mathscr{F}$ が一般分裂かつ $X$ が直線で覆われていても, $\rho_X$ には上限がない.

- $\mathscr{F}$ が一般分裂
  $\iff$ 一般の二点を固定した $\mathscr{F}$ の変形が次元を持つ,
  $\iff$ $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+2$.



# 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

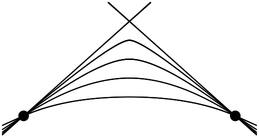
**注意 2.3**

$e=4$ のとき, $\mathscr{F}$ が一般分裂かつ $X$ が直線で覆われていても, $\rho_X$ には上限がない.

- $\mathscr{F}$ が一般分裂
  $\iff$ 一般の二点を固定した $\mathscr{F}$ の変形が次元を持つ,
  $\iff$ $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+2$.

  $\downarrow$ 条件強く

- $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ を仮定.



**定理 2.4 (S)**

$e = 4$ のとき, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ ならば, 次のいずれかを満たす:

**定理 2.4 (S)**

$e=4$ のとき, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ ならば, 次のいずれかを満たす:

- a $\rho_X \leq 4$ かつ $X$ は直線で覆われる;

**定理 2.4 (S)**

$e = 4$ のとき, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ ならば, 次のいずれかを満たす:

- (a) $\rho_X \leq 4$ かつ $X$ は直線で覆われる;
- (b) $X$ は 3 次有理連結である;

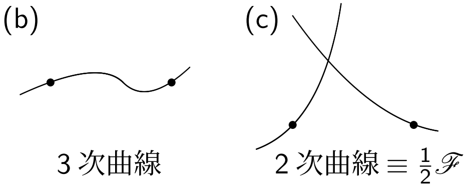
(b)

3 次曲線

**定理 2.4 (S)**

$e=4$ のとき, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ ならば, 次のいずれかを満たす:

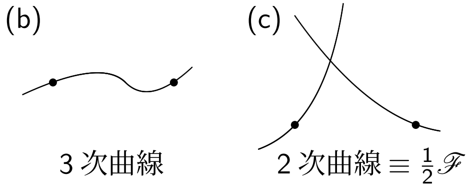
- a. $\rho_X \leq 4$ かつ $X$ は直線で覆われる;
- b. $X$ は 3 次有理連結である;
- c. $X$ の一般の二点は, 数値的に $\mathscr{F}$ の半分に同値な二つの 2 次曲線の鎖で繋がれる.



**定理 2.4 (S)**

$e=4$ のとき, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ ならば, 次のいずれかを満たす:

- (a) $\rho_X \leq 4$ かつ $X$ は直線で覆われる;
- (b) $X$ は 3 次有理連結である;
- (c) $X$ の一般の二点は, 数値的に $\mathscr{F}$ の半分に同値な二つの 2 次曲線の鎖で繋がれる.




- 二つの例外を除いて $\rho_X \leq 4$ を証明した.

**注意 2.5**

$(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ を仮定しても, $\rho_X$ には上限がない.

**注意 2.5**

$(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ を仮定しても，$\rho_X$ には上限がない．

**例**

- $\varphi : X \to Q_n$: $k$ 点 $P_1, \ldots, P_k$ でのブローアップ ($n \geq 3,\ k \leq 2n+1$),
- $H := \varphi^* \mathscr{O}_{Q_n}(2) - \sum_{i=1}^{k} \varphi^{-1}(P_i)$,
- $\mathscr{F}$: $Q_n$ 内の一般の 2 次曲線の強変換の族.

このとき,

- $(X, H)$ は 4 次有理曲線族 $\mathscr{F}$ に関して有理連結,
- $(-K_X.\mathscr{F}) = 2n \geq n+3$,
- $\rho_X = k+1$,
- (b), (c) の条件を同時に満たす.

## 曲面の場合

- $n = 2$ の場合において, 分類を与えた.

**定理 2.6 (S)**

$e = 4$, $n = 2$ とするとき, $(X, H)$ は次のいずれかと同型である:

$X$ が直線で覆われるとき

$(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1))$;
$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1,3))$; $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1,2))$; $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1,1))$;
$(\mathbb{F}_1, C_0 + 4f)$; $(\mathbb{F}_1, C_0 + 3f)$; $(\mathbb{F}_1, C_0 + 2f)$;
$(\mathbb{F}_2, C_0 + 4f)$; $(\mathbb{F}_2, C_0 + 3f)$;
$(\mathbb{F}_3, C_0 + 4f)$.

- $\mathbb{F}_\epsilon$: 線織曲面 (ruld surface) $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-\epsilon))$.

**定理 2.6 (S)**

$X$ が直線で覆われず $\mathscr{F}$ が一般分裂のとき

$(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}(2))$;

$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathscr{O}(2, 2))$;

$(S_k, -K_{S_k})$, $2 \leq k \leq 8$.

$X$ が直線で覆われず $\mathscr{F}$ が一般非分裂のとき

$(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}(4))$;

$(T_k, 4L - E_1 - \cdots E_k)$, $1 \leq k \leq 15$;

$(T_k, 4L - 2E_1 - E_2 - \cdots E_k)$, $1 \leq k \leq 12$;

$(\tilde{T}_k, 4\tilde{L} - 3\tilde{E} - 2\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 - \cdots - \tilde{E}_k)$, $1 \leq k \leq 11$.

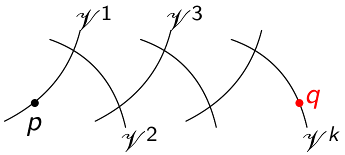
- $S_k$ (resp. $T_k$) は $\mathbb{P}^2$ の一般の (resp. 一般でないかもしれない) $k$ 点におけるブローアップ.

## 有理曲線族の理論

有理曲線族 $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ および点 $p$ に対して,

$$L := \mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)$$

を右図のような点 $q$ の集合とする.

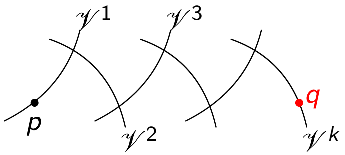


## 有理曲線族の理論

有理曲線族 $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ および点 $p$ に対して，

$$L := \mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)$$

を右図のような点 $q$ の集合とする．




**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

$\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂であるとする．

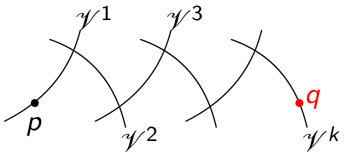
# 2. 証明の概略

## 有理曲線族の理論

有理曲線族 $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ および点 $p$ に対して,

$$L := \mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)$$

を右図のような点 $q$ の集合とする.




**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

$\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂であるとする.

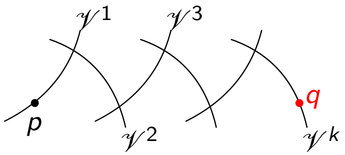
1. $\overline{L} = X$ ならば, $N_1(X)$ は $[\mathscr{V}^1], \ldots, [\mathscr{V}^k]$ で生成される.
   特に, $\rho_X \leq k$.

## 有理曲線族の理論

有理曲線族 $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ および点 $p$ に対して,

$$L := \mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)$$

を右図のような点 $q$ の集合とする.




**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

$\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂であるとする.

1. $\overline{L} = X$ ならば, $N_1(X)$ は $[\mathscr{V}^1], \ldots, [\mathscr{V}^k]$ で生成される. 特に, $\rho_X \leq k$.
2. $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が数値的独立ならば, $\dim L \geq \sum_{i=1}^k (-K_X . \mathscr{V}^i) - k$.

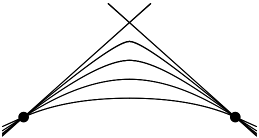
## 定理 2.4 の証明の概略

$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n + 3$ を仮定.

定理 2.4 の証明の概略

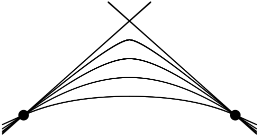
$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n + 3$ を仮定.

$\to \mathscr{F}$ は一般分裂.



## 定理 2.4 の証明の概略

$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ を仮定.
$\rightarrow \mathscr{F}$ は一般分裂.



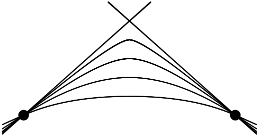
分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次
2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

### 定理 2.4 の証明の概略

$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n + 3$ を仮定.

$\to \mathscr{F}$ は一般分裂.



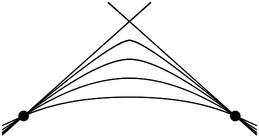
分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次
2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

## 定理 2.4 の証明の概略

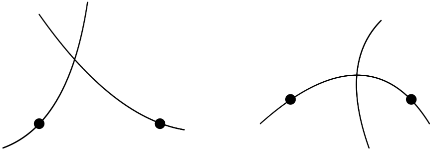
$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$ を仮定.

$\rightarrow \mathscr{F}$ は一般分裂.



分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次



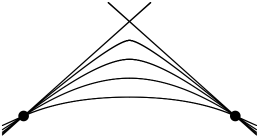
2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

# 2. 証明の概略

## 定理 2.4 の証明の概略

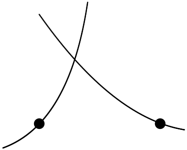
$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n + 3$ を仮定.

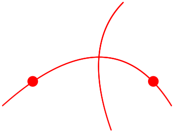
$\to \mathscr{F}$ は一般分裂.



分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次





2 次有理連結
$\to \rho_X \leq 2.$

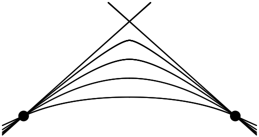
2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

# 2. 証明の概略

## 定理 2.4 の証明の概略

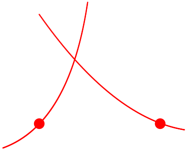
$e = 4$, $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n + 3$ を仮定.

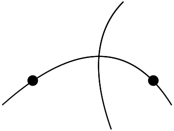
$\rightarrow \mathscr{F}$ は一般分裂.



分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次

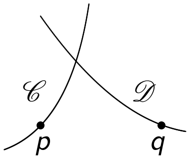




2 次有理連結
$\rightarrow \rho_X \leq 2$.

2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

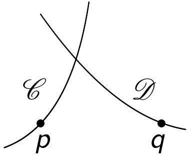
$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$$

## 2. 証明の概略

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族



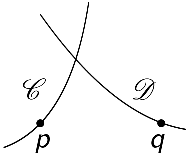

$$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$$

**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

1. $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂とする.
   $\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)} = X$ ならば, $\rho_X \leq k$.

1. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 非分裂
2. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂
3. $\mathscr{C}$: 分裂, $\mathscr{D}$: 分裂

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族



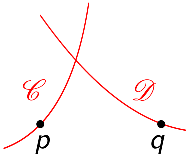

$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$

**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

1. $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂とする.
   $\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)} = X$ ならば, $\rho_X \leq k$.

# 2. 証明の概略

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族



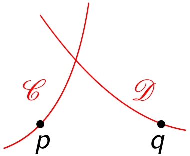

$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$

1. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 非分裂

**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

1. $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂とする.
   $\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)} = X$ ならば, $\rho_X \leq k$.

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$

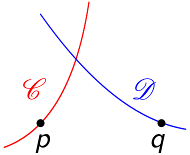
1. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 非分裂
   $\downarrow$ [A,C,O, (1)]
   $\rho_X \leq 2.$

**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

1. $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂とする.
   $\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p)} = X$ ならば, $\rho_X \leq k$.

2. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$$

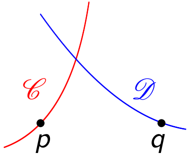
# 2. 証明の概略

❷ $\color{red}{\mathscr{C}}$: 非分裂, $\color{blue}{\mathscr{D}}$: 分裂

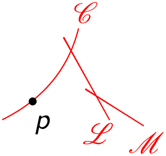
$\rightarrow \color{red}{\mathscr{L}}, \color{red}{\mathscr{M}}$: 直線族

- $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}]$
- $N_1(X) = \langle [\mathscr{C}], [\mathscr{D}] \rangle$
- $\color{red}{\mathscr{C}}$, $\color{red}{\mathscr{L}}$, $\color{red}{\mathscr{M}}$ が数値的独立

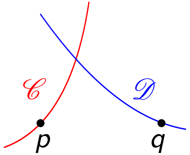
$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族



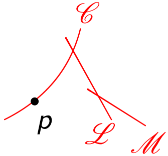

$$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$$



$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$$

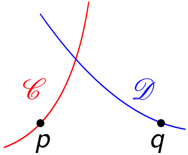



2. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂
   $\to \mathscr{L}, \mathscr{M}$: 直線族

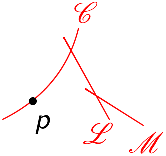
- $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}] = \frac{1}{2}[\mathscr{F}] \to$ (c).
- $N_1(X) = \langle [\mathscr{C}], [\mathscr{D}] \rangle$
- $\mathscr{C}, \mathscr{L}, \mathscr{M}$ が数値的独立

# 2. 証明の概略

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$




2. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂
   $\to \mathscr{L}, \mathscr{M}$: 直線族

- $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}] = \frac{1}{2}[\mathscr{F}] \to$ (c).
- $N_1(X) = \langle [\mathscr{C}], [\mathscr{D}] \rangle \to \rho_X \leq 2$.
- $\mathscr{C}, \mathscr{L}, \mathscr{M}$ が数値的独立

# 2. 証明の概略

❷ $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂

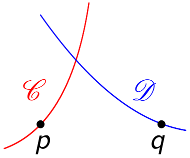
$\rightarrow \mathscr{L}, \mathscr{M}$: 直線族

- $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}] = \frac{1}{2}[\mathscr{F}] \rightarrow$ (c).
- $N_1(X) = \langle [\mathscr{C}], [\mathscr{D}] \rangle \rightarrow \rho_X \leq 2$.
- $\mathscr{C}, \mathscr{L}, \mathscr{M}$ が数値的独立

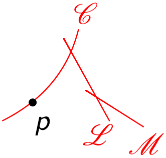
  $\downarrow$ [A,C,O, (2)]

  $\mathrm{Locus}(\mathscr{M}, \mathscr{L}, \mathscr{C}; p)$

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p) = X$



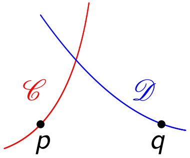

**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta '04)**

❷ $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂かつ数値的独立ならば,

$$\dim \mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p) \geq \sum_{i=1}^{k}(-K_X.\mathscr{V}^i) - k.$$

# 2. 証明の概略

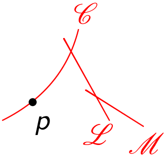
$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$$\frac{\phantom{xx}}{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p) = X}$$

2. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂
   $\rightarrow \mathscr{L}, \mathscr{M}$: 直線族

- $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}] = \frac{1}{2}[\mathscr{F}] \rightarrow$ (c).
- $N_1(X) = \langle [\mathscr{C}], [\mathscr{D}] \rangle \rightarrow \rho_X \leq 2$.
- $\mathscr{C}, \mathscr{L}, \mathscr{M}$ が数値的独立
  $\downarrow$ [A,C,O, (2)], $(-K_X.\mathscr{F}) \geq n+3$
  $$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{M}, \mathscr{L}, \mathscr{C}; p) = X}$$

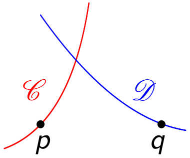



**事実 (M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta ’04)**

2. $\mathscr{V}^1, \ldots, \mathscr{V}^k$ が非分裂かつ数値的独立ならば,
   $\dim \mathrm{Locus}(\mathscr{V}^k, \ldots, \mathscr{V}^1; p) \geq \sum_{i=1}^{k}(-K_X.\mathscr{V}^i) - k$.

# 2. 証明の概略

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$

2. $\mathscr{C}$: 非分裂, $\mathscr{D}$: 分裂
   $\to \mathscr{L}, \mathscr{M}$: 直線族

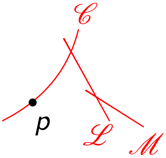
- $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}] = \frac{1}{2}[\mathscr{F}] \to$ (c).
- $N_1(X) = \langle [\mathscr{C}], [\mathscr{D}] \rangle \to \rho_X \leq 2$.
- $\mathscr{C}, \mathscr{L}, \mathscr{M}$ が数値的独立

  $\downarrow$ [A,C,O, (2)], $(-K_X . \mathscr{F}) \geq n + 3$

  $\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{M}, \mathscr{L}, \mathscr{C}; p)} = X$

  $\downarrow$ [A,C,O, (1)]

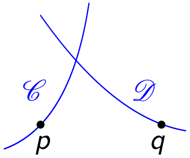
  $\rho_X = 3$.



# 2. 証明の概略

3. $\mathscr{C}$: 分裂,　$\mathscr{D}$: 分裂

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族



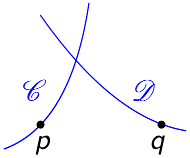

$$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$$

3. $\mathscr{C}$: 分裂, $\mathscr{D}$: 分裂

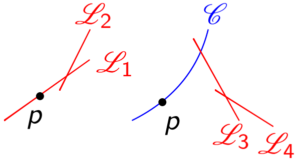
$\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3, \mathscr{L}_4$ に関して有理鎖連結.

$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{L}_{i(k)}, \ldots, \mathscr{L}_{i(1)}; p)} = X.$

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族




$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$



3. $\mathscr{C}$: 分裂, $\mathscr{D}$: 分裂

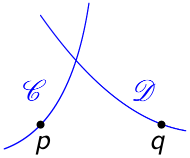
$\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3, \mathscr{L}_4$ に関して有理鎖連結.

$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{L}_{i(k)}, \ldots, \mathscr{L}_{i(1)}; p)} = X$.

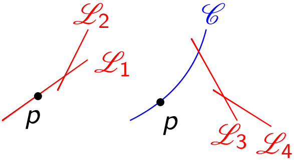
$\downarrow$ [A,C,O, (1)]

$\rho_X \leq 4$.

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$: 2 次曲線の族

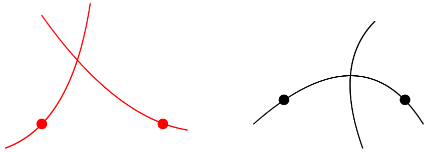



$\overline{\mathrm{Locus}(\mathscr{D}, \mathscr{C}; p)} = X$



分裂の仕方

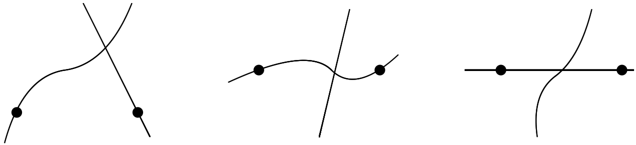
1. 2 次 + 2 次



2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次
2. 3 次 + 直線

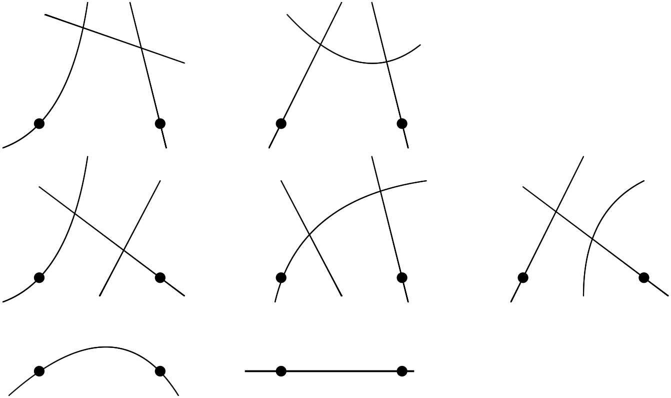


3. 2 次 + 直線 + 直線
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

# 2. 証明の概略

分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次
2. 3 次 + 直線
3. 2 次 + 直線 + 直線



4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線

分裂の仕方

1. 2 次 + 2 次 $\to$ (a) or (c)
2. 3 次 + 直線 $\to$ (a) or (b)
3. 2 次 + 直線 + 直線 $\to$ (a)
4. 直線 + 直線 + 直線 + 直線 $\to$ (a)

# 研究成果

## 1. 高次元の超曲面で覆われる多様体の研究

高次元の $d$ 次超曲面で覆われる多様体が自明なもののみであることを

- $d = 4$ の場合,
- 一般次数で, Hartshorne 予想を仮定した場合,

それぞれの場合において証明した.

## 2. 四次有理曲線に関して有理連結な多様体の研究

4 次有理連結な偏極多様体について研究し,

- ピカール数が 4 以下であるための十分条件を与えた;
- 曲面の場合において分類を与えた.