

Projective geometry in arbitrary characteristic and Rational curves on algebraic varieties

古川 勝久

2011 年 7 月 1 日

研究概要

1 超曲面上の有理曲線族の研究

射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の d 次超曲面 X に対して, その上の滑らかな e 次有理曲線のなす族を $R_e(X)$ により記す. ここで, $R_e(X)$ は Hilbert スキーム $\text{Hilb}(X)$ の開部分スキームとなる. 数値

$$\mu := (N+1-d)e + n - 4$$

は, $R_e(X)$ の期待次元と呼ばれ, 次元に関する次の式が成立する:

$$\dim R_e(X) \geq \mu = \chi(N_{C/X}) \quad (C \in R_e(X)).$$

直線族 $R_1(X)$ については古くから調査がなされており, 特に W.Barth-A. Van de Ven の両氏による $\mathbb{C}$ 上での共同研究 [BV] と, J. Kollár 氏による任意標数の代数閉体上での研究 [K, V, Thm. 4.3] とが知られている. さらに, 次数 $e > 1$ の有理曲線族については, J. Harris-M. Roth-J. Starr の三氏の共同研究 [HRS] により次が示された:

定理 (J. Harris-M. Roth-J. Starr [HRS] ($\mathbb{C}$ 上)). $X \subset \mathbb{P}^n$ を次数 d の一般の超曲面とする. このとき $d < (N+1)/2$ ならば, $R_e(X)$ は局所完全交叉な整スキームでその次元は期待次元 μ に一致する.

一方で, 本研究では任意標数において以下の結果を得た:

定理 1 ([1, Thm. 1.1] (任意標数)). $X \subset \mathbb{P}^n$ を次数 d の一般の超曲面とする.

(a) $d \geq \max(e-2, 1)$ が成立するとする. この時 $\mu < 0$ ならば, $R_e(X) = \emptyset$ となる.

(b) $1 \leq e \leq 3$ & $d \geq 1$, あるいは $e \geq 4$ & $d \geq 2e-3$ が成立するとする. この時 $\mu \geq 0$ であるならば, $R_e(X)$ は非特異でその次元は期待次元 μ に一致する.

(c) $\mu \geq 1$ が成立するとき, 二次曲線族 $R_2(X)$ は連結である. ただし, X が $\mathbb{P}^3$ 内の三次曲面の場合をのぞく.

なお, (c) における例外であるところの, 三次曲面 $X \subset \mathbb{P}^3$ については, その上の 27 本の直線に対応して, $R_2(X)$ が 27 個の連結成分をもつことがわかる [1, Prop. 5.4].

2 正標数のガウス写像の研究 (楯 元・深澤 知の両氏との共同研究 [3], および著者単独の研究 [4].)

与えられた埋込み $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ について, ガウス写像

$$\gamma_\iota: X \dashrightarrow G := G(\dim X, \mathbb{P}^N)$$

を, 非特異点 $x \in X$ に対し $\mathbb{P}^N$ 内の埋込み接空間 $\mathbb{T}_x X$ を対応させるものとして定義する (ただし X が $\mathbb{P}^N$ 内の線形部分多様体となる自明な場合は考えないことにする). また γ_ι の階数とは, ガウス写像の微分の一般点 $x \in X$ における階数 $\text{rk}(d_x \gamma_\iota: T_x X \rightarrow T_{\gamma_\iota(x)} G)$ を意味することとする. ここで, 射影多様体に関する内在的性質 (GMRZ) を定義する. 次の条件をみたすとき, X は (GMRZ) をみたすと言う:

ある埋込み $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ が存在し, そのガウス写像 γ_ι の微分の階数が零となる.

(なお, (GMRZ) という表記は Gauss map of rank zero を略したものである.)

標数零においては, (GMRZ) をみたす非特異多様体 X は存在しない. しかし, 正標数においては存在することが知られている (Fermat 型超曲面など). このような特殊な多様体の調査がここでの目的となる.

本研究においては特に, X 上に有理曲線 C が存在する状況について考察した. 根幹となるのは「条件 (GMRZ) は法束 $N_{C/X}$ に反映され, その $\mathbb{P}^1$ 上での分解型を特殊なものとする」という定理である [3, Thm. 0.2]. この定理をもととして, さらにつぎの特徴付けの結果を得た:

定理 2 ([3, Thm. 0.4], [4, Thm. 0.1]). $X \subset \mathbb{P}^N$ を非特異三次超曲面で $N \geq 4$ とする. このとき X が (GMRZ) をみたすことは, 標数が 2 であつ X がフェルマー型超曲面と射影変換で移り合うことと同値である.

この定理は次にのべる様な段取りで示された: $N \geq 6$ の時は X 上の直線族に関する一般的議論などにより定理を示し, $N = 5$ の時は個別の議論を行ない解決した [3]. さらに $N = 4$ の場合には追加の議論が必要となった [4]. また一方で, $N = 3$ では上の特徴付けが成立しないことがわかった [4, Thm. 2.3]. より一般には次を得た.

定理 3 ([4, Thm. 2.5]). 非特異有理曲面 X が (GMRZ) をみたすことは次のことと同値である:

(a) 標数が 2 である, あるいは (b) 正標数で $X \simeq \mathbb{P}^2$ である.

この結果を示すうえでは, 以下の定理を与えることが本質的である:

定理 4 ([4, Thm. 0.2]). 標数 2 においては, 点ブローアップの操作のもとで性質 (GMRZ) は保たれる.

特に, 定理 4 の証明の最初の段階としては, 標数 2 における $\mathbb{P}^N$ の 1 点 x でのブローアップ $\text{BL}_x \mathbb{P}^N$ に対して, 階数零のガウス写像を与える埋込みを具体的なかたちで与えた [4, Prop. 2.7].

3 任意標数での Segre locus の定義イデアルの研究

ここでは, 射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の多様体 X を多重射影する点の集合について考察する. 正確には, 以下のものを定義し調査する:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^{\text{out}}(X) &:= \overline{\{z \in \mathbb{P}^N \setminus X \mid \pi_{z|X} : X \rightarrow \pi_z(X) \text{ は双有理射ではない}\}}, \\ \mathfrak{S}^{\text{inn}}(X) &:= \overline{\{z \in X \mid \pi_{z|X} : X \dashrightarrow \pi_z(X) \text{ は双有理射ではない}\}}.\end{aligned}$$

ただし $\pi_z : \mathbb{P}^N \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ は点射影とする. 次の基本定理が B. Segre により示された:

定理 (B. Segre [S]). 標数零においては, $\mathfrak{S}^{\text{out}}(X)$ は $\mathbb{P}^N$ 内の線型多様体の和集合となる.

この定理にちなみ $\mathfrak{S}^{\text{out}}(X)$ は Segre locus とよばれ, イタリア学派などにより調査が進められた. 最近では A. Calabri-C. Ciliberto [CC], E. Ballico [B], 野間 淳 [N] の各氏による研究がある.

さて, $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X) := \mathfrak{S}^{\text{out}}(X) \cup \mathfrak{S}^{\text{inn}}(X)$ と置き, これを total Segre locus と呼ぶこととする. 本研究の目的は, $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ について任意標数において調べることである. ここでは標数零において用いることができた様々な射影幾何の方法が適用できなくなる. そのため, より根本的に $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ の定義イデアルを記述することを目指し, 次の様に結果を得た [2, Thm. 2.7, Prop. 2.10, Thm. 2.13]:

$\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ は, (iterative な) 高階導分と X の定義方程式とから構成される行列の, 行列式多様体によって表せられる.

特に $X \subset \mathbb{P}^N$ の余次元が 2 の場合には, $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ はより明確に求めることができる [2, Thm. 2.7]. 以上の結果により, $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ の定義イデアルをくわしく調査することで, 線型性の定理を任意標数に拡張することができた:

定理 5 ([2, Thm. 1.1]). 標数を p とする. 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し, $p = 0$ あるいは $p \geq \deg(X)$ が成立するならば, $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ は $\mathbb{P}^N$ 内の線型多様体の和集合として表される.

また他方 $p < \deg(X)$ の場合には $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ が非線形となり得ることも, 実際の例を与えることで示した [2, Ex. 3.1].

参考文献

- [B] E. Ballico, Special inner projections of projective varieties. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)* **50** (2004), 23–26.
- [BV] W. Barth and A. Van de Ven. Fano varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. Math. (Basel)* **31** (1978/79), 96–104.
- [CC] A. Calabri and C. Ciliberto, On special projections of varieties: epitome to a theorem of Beniamino Segre, *Adv. Geom.* **1** (2001), 97–106.
- [HRS] J. Harris, M. Roth, and J. Starr. Rational curves on hypersurfaces of low degree. *J. Reine Angew. Math.* **571** (2004), 73–106.
- [K] J. Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [N] A. Noma, Hypersurfaces cutting out a projective variety, *Trans. AMS.* **362** (2010), no. 9, 4481–4495.
- [S] B. Segre, On the locus of points from which an algebraic variety is projected multiply, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan Ser. III*, **18** (1936), 425–426.

業績

1 論文

1.1 単著

- [1] *Rational curves on hypersurfaces*, to appear in Journal für die reine und angewandte Mathematik.
- [2] *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, Journal of Algebra **336** (2011), 84–98.

1.2 共著

- [3] *Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, Advances in Mathematics **224** (2010), 2645–2661 (with S. Fukasawa and H. Kaji).

1.3 プレプリント

- [4] *Cubic hypersurfaces admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, preprint.

2 報告集

- [5] *Smoothness of the family of rational curves on a general hypersurface*, 都の西北代数幾何シンポジウム・報告集 (2011), 27–37.

3 研究発表

3.1 研究集会における講演発表 (国内)

- 1. *Rational curves on hypersurfaces*, Castelnuovo-Mumford 量についての研究会 (2008 年 2 月), 佐賀大学.
- 2. *Rational curves on hypersurfaces*, 日本数学会 2008 年度年会・代数学 (2008 年 3 月), 近畿大学.
- 3. *Rational curves on hypersurfaces*, Algebraic geometry seminar, the next generation (2009 年 1 月), 首都大学東京.
- 4. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, Workshop on “Syzygies of the Projective Varieties” (2009 年 9 月), 佐賀大学.
- 5. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会・代数学 (2009 年 9 月), 大阪大学.
- 6. *Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会・代数学 (2009 年 9 月), 大阪大学.
- 7. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, 高次元代数幾何の周辺 (RIMS 研究集会) (2009 年 12 月), 京都大学.
- 8. *Rational curves on hypersurfaces*, 複素幾何と代数幾何の若手研究集会 (複素関数論 in 熊本との合同開催) (2010 年 2 月), 熊本大学.
- 9. *Rational curves on hypersurfaces*, 都の西北代数幾何学シンポジウム (2010 年 11 月), 早稲田大学.

3.2 研究集会における講演発表 (国外)

- 1. *Rational curves on hypersurfaces*, Sun from Japan (2007 年 8 月), IMPA (ブラジル) (招待講演).
- 2. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, 2010 Algebra and Geometry of Subvarieties of Projective Space (2010 年 1 月), KAIST (韓国) (招待講演).

3.3 セミナーにおける講演発表

- 1. *Rational curves on hypersurfaces*, 特異点論月曜セミナー (2008 年 4 月), 日本大学.

2. *Rational curves on hypersurfaces*, 東北大学代数幾何セミナー (2008 年 5 月), 東北大学.
3. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, 特異点論月曜セミナー (2009 年 4 月), 日本大学.
4. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, 東北大学代数幾何セミナー (2009 年 11 月), 東北大学.
5. *Rational curves on hypersurfaces*, 東京大学代数幾何学セミナー (2010 年 7 月), 東京大学.
6. *Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, 広島大学代数学セミナー (2010 年 12 月), 広島大学.
7. *Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, 東京大学代数幾何学セミナー (2011 年 5 月), 東京大学.

3.4 ポスターセッション

1. *Rational curves on hypersurfaces*, 城崎代数幾何シンポジウム・ポスターセッション (2008 年 10 月), 兵庫県立城崎大会議館.
2. *Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*, 城崎代数幾何シンポジウム・ポスターセッション (2009 年 10), 兵庫県立城崎大会議館.
3. *Gauss map of rank zero*, 城崎代数幾何シンポジウム・ポスターセッション (2010 年 10), 兵庫県立城崎大会議館.