

任意標数の射影幾何と 多様体上の有理曲線

古川 勝久

■ 超曲面上の有理曲線族の研究

[1] “*Rational curves on hypersurfaces*” Crelle’s Journal (to appear).

■ 正標数のガウス写像の研究

[3] (楫-深澤の両氏との共著) “*Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*” Adv. Math. 224 (2010), および

[4] “*Cubic hypersurfaces admitting an embedding with Gauss map of rank zero*” preprint.

■ Segre locus の研究

[2] “*Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*” J. Alg. 336 (2011).

超曲面上の有理曲線族の研究

1. 超曲面上の有理曲線族の研究

([1] “*Rational curves on hypersurfaces*”.)

d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して, 次の様に定める:

$$R_e(X) := (X \text{ 上の滑らかな } e \text{ 次有理曲線のなす族}) \\ \subset \text{Hilb}(X),$$

$$\mu := (N + 1 - d)e + n - 4 \quad (\text{期待次元}).$$

ここで, 不等式

$$\dim R_e(X) \geq \mu = \chi(N_{C/X})$$

が成立する.

直線族 $R_1(X)$:

- Barth-Van de Ven による研究 ('78, $\mathbb{C}$ 上),
- Kollár による研究 ('96, 任意標数).

$e > 1$:

- Harris-Roth-Starr による研究 ('04, $\mathbb{C}$ 上),
- [1] における今回の研究 (任意標数).

有理曲線族の研究 (d : 小)

定理 (Harris-Roth-Starr ($\mathbb{C}$ 上)).
 $X \subset \mathbb{P}^n$: 次数 d の一般の超曲面.

$d < (N + 1)/2 \implies R_e(X)$ は 局所完全交叉な整スキーム
でその次元は 期待次元 μ に一致する.

- $d < (N + 1)/2$ の条件の下では, 常に $\mu > 0$.
- 上の定理につづくものとして, Harris-Starr による共同研究, さらに Starr による単独の研究もある.
- Beheshti-Kumar により, 最近, 上の定理は完全交叉 $X \subset \mathbb{P}^n$ の場合へ拡張された.

有理曲線族の研究 (e : 小)

一方で, 本研究では以下の結果を得た:

定理 1 ([1] (任意標数)). $X \subset \mathbb{P}^n$: 次数 d の一般の超曲面.

1. $d \geq \max(e-2, 1) \implies \mu < 0$ のとき $R_e(X) = \emptyset$.

2. $\begin{cases} 1 \leq e \leq 3 \text{ \& } d \geq 1, \text{ or} \\ e \geq 4 \text{ \& } d \geq 2e-3 \end{cases} \implies \mu \geq 0$ のとき, $R_e(X)$ は **非特異** で
その次元が **期待次元 μ** に一致する.

3. $\mu \geq 1$ のとき二次曲線族 $R_2(X)$ は **連結** となる.

ただし, X が三次曲面である場合はのぞく (この場合,
 $R_2(X) = 27$ 個の連結成分).

研究方法 (1)

d 次超曲面の集合 $H := |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|$ に対し, incidence variety I と射影:

$$p_H: I \rightarrow H$$

とを得る. これは, $p_H^{-1}(X) = R_e(X)$ ($X \in H$) となるものである (注[†]).
この時, p_H の **non-smooth locus**:

$$Z := \left\{ (X, C) \in I \mid \begin{array}{l} p_H \text{ が } (X, C) \text{ で smooth とならない} \\ (d_{(X,C)} p_H: T_{(X,C)} I \rightarrow T_X H \text{ が全射でない}) \end{array} \right\}$$

を考察する. (注[†]: 実際は, 以下の様に定める:

$$\mathcal{R} := (\mathbb{P}^n \text{ 上の滑らかな } e \text{ 次有理曲線のなす族}) \subset \text{Hilb}(\mathbb{P}^n),$$

$$I := \{(X, C) \in I \times \mathcal{R} \mid C \subset X\}.$$

特に, 定理 1(b) の証明のためには $Z \subset I$ が充分小さい (具体的には $\text{codim}(Z, I) \geq \mu + 1$) がわかればよい. このために以下のような道具をそろえた (ここで, $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset \mathbb{P}^n$):

- イデアル層 $\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^n}$, その二乗 $\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^n}^2$ の Castelnuovo-Mumford regularity.
- 法束の分解 $f^* N_{C/\mathbb{P}^n} = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbf{a}_i)$ についての $\mathbf{a}_i$ の bounds.
- $\text{codim}(Z, I)$ の計算のさいに, catalecticant 行列があらわれる.
その小行列式の零点と Z との間のある対応がある. これは rational normal curve の Secant の幾何的性質とむすびつく.

catalecticant 行列:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{\varepsilon-\alpha} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{\varepsilon-\alpha+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{\varepsilon-\alpha+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_\alpha & c_{\alpha+1} & c_{\alpha+2} & \cdots & c_\varepsilon \end{bmatrix}$$

rational normal curve:

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^a : (s, t) \mapsto (s^a, s^{a-1}t, \dots, s^{a-i}t^i, \dots, t^a)$$

正標数のガウス写像の研究

2. 正標数のガウス写像の研究

([3](楫-深澤の両氏との共著) “*Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*”, および [4] “*Cubic hypersurfaces admitting an embedding with Gauss map of rank zero*”.)

与えられた埋込み $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に対して, そのガウス写像

$$\gamma_\iota: X \dashrightarrow G := \mathbb{G}(\dim X, \mathbb{P}^N): x \mapsto [\mathbb{T}_x X]$$

が定義される. ここで, $\mathbb{T}_x X \subset \mathbb{P}^N$ は埋込み接空間とした.
また階数 $\mathbf{rk}(\gamma_\iota)$ をつぎの値により定める:

$$\mathbf{rk}(d_x \gamma_\iota: T_x X \rightarrow T_{\gamma(x)} G) \quad (x \in X: \text{general}).$$

射影多様体の内在的性質 (GMRZ)

射影多様体 X が (GMRZ) をみたす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある埋込み ι が存在し、そのガウス写像の階数 $\mathbf{rk}(\gamma_\iota)$ が零となる。

(Gauss map of rank zero)

例: 正標数における Fermat 型超曲面など.

$$X = (x_0^{p+1} + x_1^{p+1} + \cdots + x_n^{p+1}) \subset \mathbb{P}^n,$$

$$\gamma : X \rightarrow (\mathbb{P}^n)^\vee : (1 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (1 : x_1^p : \cdots : x_n^p),$$

$$\implies \mathbf{rk}(\gamma) = 0.$$

X 上の有理曲線 C を用いた考察 根幹となる定理:

条件 (GMRZ) は法束 $N_{C/X}$ に反映され,
その $\mathbb{P}^1$ 上での分解型を特殊なものとする.

定理 ([3]). $C \subset X$: 有理曲線, $N_{C/X}^\vee \simeq \bigoplus_{i \geq -1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i)^{r_i}$ とする.
このとき,

- X : (GMRZ) みたす $\implies r_{i-1} r_i = 0$ ($\forall i \geq 0$).
- 上に加えて $r_i > 0$ ($\exists i \geq 0$) $\implies p = 2$ or $p \mid i + 1$.

特徴付けの定理:

定理 2 ([3],[4]). $X \subset \mathbb{P}^N$: 非特異三次超曲面, $N \geq 4$.

X が (GMRZ) をみたす $\iff$ 標数が **2** & X が **フェルマー型超曲面** と射影変換で移りあう.

証明の段取り:

- $N \geq 6$: X 上の直線族に関する一般的議論による [3].
- $N = 5$: 上にくわえて個別の議論をする [3].
- $N = 4$: さらに追加の議論が必要 [4].

非特異有理曲面, Blowing-up

$N = 3$ では上の特徴付けが 成立しない: より一般に,

標数 2 では, 全ての非特異有理曲面は (GMRZ) をみたす [4].

次の定理が本質的:

定理 3 ([4]). 標数 2 においては, 点ブローアップの操作のもとで性質 (GMRZ) は保たれる.

ここで特に, $\mathbb{P}^m$ の一点ブローアップ $\mathrm{BL}_z \mathbb{P}^m$ に対して, そのガウス写像の階数が零となる埋込み $\mathrm{BL}_z \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ を具体的に得た.

一点ブローアップの埋込み

$$\begin{array}{ccc}
 z \vdash & \xrightarrow{\quad} & z' \\
 \cap & & \cap \\
 \mathbb{P}^m & \xrightarrow{\Gamma_{\text{Frob}_p}} \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow & \mathbb{P}^M \\
 \uparrow & & \downarrow \pi_{z'} \\
 \text{BL}_z \mathbb{P}^m & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \mathbb{P}^{M-1}
 \end{array}$$

命題 $X := \varphi(\text{BL}_z \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{M-1}$ とおく.

- $X \subset \mathbb{P}^M$ のガウス写像は階数零.
- $\varphi : \text{BL}_z \mathbb{P}^m \rightarrow X$ が isom $\iff p = 2$.

3. 任意標数での Segre locus の定義イデアルの研究

([2] “*Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic*”.)

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し,

$$\mathfrak{S}^{\text{out}}(X) := \overline{\{z \in \mathbb{P}^N \setminus X \mid \pi_{z|X} : X \rightarrow \pi_z(X) \text{ は双有理射ではない}\}}$$

$$\mathfrak{S}^{\text{inn}}(X) := \overline{\{z \in X \mid \pi_{z|X} : X \dashrightarrow \pi_z(X) \text{ は双有理射ではない}\}}.$$

なる集合は, 次にのべる定理にちなんで **Segre locus** と呼ばれる.

Segre の定理 (線型性)

定理 (Segre, '36). 標数零において,

$$\mathfrak{S}^{\text{out}}(X) = (\mathbb{P}^N \text{ 内の線型多様体の和集合}).$$

標数零においては最近では Calabri-Ciliberto ('01), Ballico ('04), Noma ('10) による研究がある.

任意標数での研究

- 標数零の様々な射影幾何の方法が適用できない.
- より根本的に $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X) := \mathfrak{S}^{\text{out}}(X) \cup \mathfrak{S}^{\text{inn}}(X)$ の定義イデアルの記述を目指す.

Segre locus の記述 (1)

結果として次を得た:

$\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ は, (iterative な) 高階導分 D_i と X の定義方程式とから構成される (巨大な) 行列の, 行列式多様体によって表せられる.

たとえば, 余次元 2 では次がわかる:

定理 ([2]). $X \subset \mathbb{P}^N$ は錐でないとする. $e \in \mathbb{N}$ に対し,
 $\text{Loc}_e(X) := \{z \in \mathbb{P}^N \mid \deg(\pi_z(X)) \leq e\}$, $r := h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(e))$ とおく.

1. $\forall Z \subset \mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ 既約成分, $\exists e \in \mathbb{N}$ s.t.

Z は $\text{Loc}_e(X)$ の既約成分のひとつに一致する.

2. $X \subset \mathbb{P}^N$: 余次元 2

$\Rightarrow \text{Loc}_e(X) = (\Lambda(e) \text{ の } r \times r \text{ 小行列式の零点集合}).$

Segre locus の記述 (2)

定義. $h_1, \dots, h_r: H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(e))$ の基底とする. $s \leq e$ に対し,

$$\Lambda_{e-s} := \begin{bmatrix} D_{(e-s)\omega_0} h_1 & D_{(e-s)\omega_0} h_2 & \dots & D_{(e-s)\omega_0} h_r \\ D_{(e-s-1)\omega_0+\omega_1} h_1 & D_{(e-s-1)\omega_0+\omega_1} h_2 & \dots & D_{(e-s-1)\omega_0+\omega_1} h_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{(e-s)\omega_N} h_1 & D_{(e-s)\omega_N} h_2 & \dots & D_{(e-s)\omega_N} h_r \end{bmatrix},$$

$$\Lambda(e) := \begin{cases} \Lambda_{e-1} & \text{if } p > e \text{ or } p = 0, \\ \begin{bmatrix} \Lambda_{e-1} \\ \Lambda_{e-p} \\ \Lambda_{e-2p} \\ \vdots \\ \Lambda_{e-\lfloor e/p \rfloor \cdot p} \end{bmatrix} & \text{if } p \leq e, \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{注: 標数によって} \\ \Lambda(e) \text{ のかたちが変わる} \end{array} \right)$$

と定める. ただし,

Segre locus の記述 (3)

$\mathbf{i} \in \mathbb{N}^{N+1}$ に対して $x^{\mathbf{i}} := x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}$ とおく.

$\boldsymbol{\omega}_l = (\omega_{l,0}, \omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,N}) \in \mathbb{N}^{N+1}$: $\omega_{l,l} = 1, \omega_{l,m} = 0$ ($m \neq l$) をみたすもの.

この設定のもと $D_{\mathbf{i}}$ は次により定義する:

$$D_{\mathbf{i}} x^{\mathbf{j}} := \binom{\mathbf{j}}{\mathbf{i}} x^{\mathbf{j}-\mathbf{i}}.$$

ここで $\binom{\mathbf{j}}{\mathbf{i}} = \binom{j_0}{i_0} \binom{j_1}{i_1} \cdots \binom{j_N}{i_N}$. 標数零なら次が成立:

$$D_{\mathbf{i}} f = \frac{1}{i_0! i_1! \cdots i_N!} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^{i_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{i_N} (f).$$

線型性 (任意標数)

定義イデアルの計算方法を得たことで, つぎを示せた:

定理 4 ([2]). $X \subset \mathbb{P}^N$: 射影多様体.

$$\begin{cases} p = 0, \text{ or} \\ p \geq \deg(X) \end{cases} \implies \mathfrak{S}^{\text{tot}}(X) = (\mathbb{P}^N \text{ 内の線型多様体の和集合}).$$

また他方,

$p < \deg(X)$ の場合には $\mathfrak{S}^{\text{tot}}(X)$ が非線形となり得る

ことも, 実際の例を与えることで示した.

($\Lambda(e)$ のかたちが変わることに対応する.)