Group actions on projective varieties and chains of rational curves on Fano varieties

渡辺 究

早稲田大学大学院基幹理工学研究科
数学応用数理専攻
楫研究室

2009/12/11

論文

出版済み

1. Kiwamu Watanabe, *Classification of polarized manifolds admitting homogeneous varieties as ample divisors*, Mathematatische Annalen 342:3 (2008), pp. 557-563.
2. Kiwamu Watanabe, *Actions of linear algebraic groups of exceptional type on projective varieties*, Pacific Journal of Mathematics 239:2 (2009), pp. 391-395.

プレプリント

1. Kiwamu Watanabe, *Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds*, June 2009, submitted.

学位申請論文の構成

題目

Group actions on projective varieties and
chains of rational curves on Fano varieties
(射影多様体への群作用とファノ多様体上の有理曲線の鎖)

第 1 章: Overview of homogeneous variety and results of projective geometry.
第 2 章: Classification of polarized manifolds admitting homogeneous varieties as ample divisors.
第 3 章: Actions of linear algebraic groups of exceptional type on projective varieties.
第 4 章: Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds.

学位申請論文の構成

題目

Group actions on projective varieties and
chains of rational curves on Fano varieties
(射影多様体への群作用とファノ多様体上の有理曲線の鎖)

第 1 章: Overview of homogeneous variety and results of projective geometry.
第 2 章: Classification of polarized manifolds admitting homogeneous varieties as ample divisors.
第 3 章: Actions of linear algebraic groups of exceptional type on projective varieties.
第 4 章: Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds.

Homogeneous Variety

Definition

射影多様体 X に対し,
X: 等質 $\Leftrightarrow$ $\exists G$: X に推移的に作用する群多様体.

Example

1. $\mathbb{P}^n$: 射影空間,
2. Q^n: 2 次超曲面,
3. $G(k, \mathbb{C}^N)$: グラスマン多様体,
4. A: アーベル多様体.

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Homogeneous Variety

Definition

射影多様体 X に対し,
X: 等質 $\Leftrightarrow$ $\exists G$: X に推移的に作用する群多様体.

Example

1. $\mathbb{P}^n$: 射影空間,
2. Q^n: 2 次超曲面,
3. $G(k, \mathbb{C}^N)$: グラスマン多様体,
4. A: アーベル多様体.

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Homogeneous Variety

Definition

射影多様体 X に対し,
X: 等質 $\Leftrightarrow$ $\exists G$: X に推移的に作用する群多様体.

Example

1. $\mathbb{P}^n$: 射影空間,
2. Q^n: 2 次超曲面,
3. $G(k, \mathbb{C}^N)$: グラスマン多様体,
4. A: アーベル多様体.

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Examples of rational homogeneous varieties

Example

* $\mathbb{P}^n$,

* $G(r, \mathbb{C}^{n+1})$,

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Examples of rational homogeneous varieties

Example

$*\ \mathbb{P}^n$,

$$\underset{\omega_1}{\bullet} \text{———} \underset{\omega_2}{\circ} \text{———} \cdots \text{———} \underset{\omega_{n-1}}{\circ} \text{———} \underset{\omega_n}{\circ}$$

$*\ G(r, \mathbb{C}^{n+1})$,

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Examples of rational homogeneous varieties

Example

$*\ \mathbb{P}^n$,

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & \text{———} & \circ & \text{———} & \cdots & \text{———} & \circ & \text{———} & \circ \\ \omega_1 & & \omega_2 & & & & \omega_{n-1} & & \omega_n \end{array}$$

$*\ G(r, \mathbb{C}^{n+1})$,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \circ & \text{———} & \circ & \text{———} & \cdots & \text{———} & \bullet & \text{———} & \cdots & \text{———} & \circ & \text{———} & \circ \\ \omega_1 & & \omega_2 & & & & \omega_r & & & & \omega_{n-1} & & \omega_n \end{array}$$

: $A_n(\omega_r)$

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Examples of rational homogeneous varieties

Example

* $\mathbb{P}^n$,

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & \text{———} & \circ & \text{———} & \cdots & \text{———} & \circ & \text{———} & \circ \\ \omega_1 & & \omega_2 & & & & \omega_{n-1} & & \omega_n \end{array}$$

* $G(r, \mathbb{C}^{n+1})$,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \circ & \text{———} & \circ & \text{———} & \cdots & \text{———} & \bullet & \text{———} & \cdots & \text{———} & \circ & \text{———} & \circ \\ \omega_1 & & \omega_2 & & & & \omega_r & & & & \omega_{n-1} & & \omega_n \end{array}$$

: $A_n(\omega_r)$

* $\begin{array}{ccc} \bullet & \Lleftarrow & \bullet \\ \omega_1 & & \omega_2 \end{array}$: $G_2(\omega_1 + \omega_2)$

有理等質多様体 $\Leftrightarrow$ ディンキン図形とその頂点の部分集合.

Kiwamu Watanabe, *Classification of polarized manifolds admitting homogeneous varieties as ample divisors*, Mathematische Annalen 342:3 (2008), pp. 557-563.（第 2 章に対応）

Definition

(X, L): 偏極多様体
$\Leftrightarrow$ X: 非特異射影多様体 $/\mathbb{C}$, L: X 上の豊富な直線束.

Kiwamu Watanabe, *Classification of polarized manifolds admitting homogeneous varieties as ample divisors*, Mathematische Annalen 342:3 (2008), pp. 557-563.（第 2 章に対応）

Definition

(X, L): 偏極多様体
$\Leftrightarrow$ X: 非特異射影多様体 $/\mathbb{C}$, L: X 上の豊富な直線束.

Problem

等質多様体 A を線形系 $|L|$ のメンバーとして含む偏極多様体 (X, L) を分類せよ.

Problem (Special case)

非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ のうち，ある超平面切断 $A = X \cap H$ が等質多様体になるものを分類せよ.

Problem

等質多様体 A を線形系 $|L|$ のメンバーとして含む偏極多様体 (X, L) を分類せよ.

Problem (Special case)

非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ のうち，ある超平面切断 $A = X \cap H$ が等質多様体になるものを分類せよ.

Example

1. (A. J. Sommese. '76)
   $A \cong \mathbb{P}^n$ $(n \geq 2) \Rightarrow (X, L) \cong (\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}(1))$.
2. (A. J. Sommese. '76)
   $\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: アーベル多様体 $(\dim A \geq 2)$.
3. (藤田 '81)
   $\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ with $(n, r) \neq (n, 1), (n, n-1), (4, 2)$.

Example

1. (A. J. Sommese. '76)
   $A \cong \mathbb{P}^n$ $(n \geq 2) \Rightarrow (X, L) \cong (\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}(1))$.
2. (A. J. Sommese. '76)
   $\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: アーベル多様体 $(\dim A \geq 2)$.
3. (藤田 '81)
   $\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ with $(n, r) \neq (n, 1), (n, n-1), (4, 2)$.

Example

1. (A. J. Sommese. '76)
$A \cong \mathbb{P}^n$ $(n \geq 2) \Rightarrow (X, L) \cong (\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}(1))$.
2. (A. J. Sommese. '76)
$\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: アーベル多様体 $(\dim A \geq 2)$.
3. (藤田 '81)
$\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ with $(n, r) \neq (n, 1), (n, n-1), (4, 2)$.

Example

1. (A. J. Sommese. '76)
   $A \cong \mathbb{P}^n$ $(n \geq 2) \Rightarrow (X, L) \cong (\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}(1))$.
2. (A. J. Sommese. '76)
   $\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: アーベル多様体 $(\dim A \geq 2)$.
3. (藤田 '81)
   $\neg\exists(X, L)$ s.t. $A \in |L|$: グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ with $(n, r) \neq (n, 1), (n, n-1), (4, 2)$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,

(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,

(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線）上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,

(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,

(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,

(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,

(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,

(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,

(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,

(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,

(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,

(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,

(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,

(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,

(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,

(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,

(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,

(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,

(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,

(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,

(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,

(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,

(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線）上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,

(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,

(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i))$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1))$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}))$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n \text{ resp. } Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1,1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n \text{ resp. } Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1,1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:

(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n$ resp. $Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1,1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n \text{ resp. } Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線）上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n \text{ resp. } Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1, 1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n$ resp. $Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1,1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n \text{ resp. } Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1,1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

Theorem (W)

(X, L, A) を先の *Problem* のものとし，$\dim A \geq 2$ を仮定する．そのとき，(X, L) は以下のいずれか:
(1) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(i), \mathbb{P}^n \text{ resp. } Q^n)$, $i = 1, 2$,
(2) $(Q^{n+1}, \mathscr{O}_{Q^{n+1}}(1), Q^n)$,
(3) $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), H(\mathcal{E}), C \times \mathbb{P}^{n-1})$, ただし，$\mathcal{E}$ は曲線 C ($\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線) 上の豊富なベクトル束，$\mathscr{L}$ は C 上の豊富な直線束で次の完全列を満たす:

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathscr{L}^{\oplus n} \to 0.$$

(4) $(\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^l}(1,1), \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l}))$,
(5) $(G(2, \mathbb{C}^{2l}), \mathscr{O}_{\text{Plücker}}(1), C_l(\omega_2) = LG(2, \mathbb{C}^{2l}))$,
(6) $(E_6(\omega_1), \mathscr{O}_{E_6(\omega_1)}(1), F_4(\omega_4))$.

証明の鍵

鍵

1. 豊富な因子として現れる等質多様体 A の絞り込み.
   1. NS-condition（藤田 '82）.
   2. Merkulov and Schwachhöfer ('99).
2. 与えられた A に対する X の構造決定.
   1. 偏極多様体や射影幾何学の結果.

証明の鍵

鍵

1. 豊富な因子として現れる等質多様体 A の絞り込み.
   1. NS-condition（藤田 '82）.
   2. Merkulov and Schwachhöfer ('99).
2. 与えられた A に対する X の構造決定.
   1. 偏極多様体や射影幾何学の結果.

証明の鍵

鍵

1. 豊富な因子として現れる等質多様体 A の絞り込み.
   1. NS-condition（藤田 '82）.
   2. Merkulov and Schwachhöfer ('99).
2. 与えられた A に対する X の構造決定.
   1. 偏極多様体や射影幾何学の結果.

証明の鍵

鍵

1. 豊富な因子として現れる等質多様体 A の絞り込み.
    1. NS-condition（藤田 '82）.
    2. Merkulov and Schwachhöfer ('99).
2. 与えられた A に対する X の構造決定.
    1. 偏極多様体や射影幾何学の結果.

Definition (藤田 '82)

X は NS-condition を満たす $\Leftrightarrow H^q(X, T_X[-L]) = 0$ for $\forall L$: 豊富な直線束, $q = 0, 1$.

Proposition (藤田 '82)

NS-condition を満たす多様体は非特異多様体の豊富な因子として含まれない.

Proposition

X を等質多様体 $(\dim X \geq 2)$ とすると以下は同値:

1. X は *NS-condition を満たさない.*
2. X は以下のいずれか:
   (a) $\mathbb{P}^n$, (b) Q^n, (c) $C \times \mathbb{P}^{n-1}$, C は $\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線,
   (d) $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l})$, (e) $C_l(\omega_2)$, (f) $F_4(\omega_4)$.

Definition (藤田 '82)

X は NS-condition を満たす $\Leftrightarrow H^q(X, T_X[-L]) = 0$ for $\forall L$: 豊富な直線束, $q = 0, 1$.

Proposition (藤田 '82)

NS-condition を満たす多様体は非特異多様体の豊富な因子として含まれない.

Proposition

X を等質多様体 $(\dim X \geq 2)$ とすると以下は同値:

1. X は *NS-condition* を満たさない.
2. X は以下のいずれか:
(a) $\mathbb{P}^n$, (b) Q^n, (c) $C \times \mathbb{P}^{n-1}$, C は $\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線,
(d) $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l})$, (e) $C_l(\omega_2)$, (f) $F_4(\omega_4)$.

Definition (藤田 '82)

X は NS-condition を満たす $\Leftrightarrow H^q(X, T_X[-L]) = 0$ for $\forall L$: 豊富な直線束, $q = 0, 1$.

Proposition (藤田 '82)

NS-condition を満たす多様体は非特異多様体の豊富な因子として含まれない.

Proposition

X を等質多様体 $(\dim X \geq 2)$ とすると以下は同値:

1. X は *NS-condition を満たさない.*
2. X は以下のいずれか:
(a) $\mathbb{P}^n$, (b) Q^n, (c) $C \times \mathbb{P}^{n-1}$, C は $\mathbb{P}^1$ もしくは楕円曲線,
(d) $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^l})$, (e) $C_l(\omega_2)$, (f) $F_4(\omega_4)$.

$A \cong F_4(\omega_4)$ のとき

$\rightsquigarrow L$: 非常に豊富, i.e., $\phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^N$: 埋め込み.
$\rightsquigarrow A = X \cap H \subset X \subset \mathbb{P}^N$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: n 次元非退化非特異射影多様体
X: Severi 多様体 $\Leftrightarrow 3n = 2(N-2)$ かつ $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^N$.

Theorem (Zak)

Severi 多様体は以下のいずれかと射影同値:

1. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$: *Veronese* 曲面.
2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$: *Segre* 多様体.
3. $G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{14}$: *Grassmann* 多様体.
4. $E_6(\omega_1) \subset \mathbb{P}^{26}$: E_6 多様体.

$A \cong F_4(\omega_4)$ のとき

$\rightsquigarrow L$: 非常に豊富, i.e., $\phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^N$: 埋め込み.

$\rightsquigarrow A = X \cap H \subset X \subset \mathbb{P}^N$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: n 次元非退化非特異射影多様体
X: Severi 多様体 $\Leftrightarrow 3n = 2(N-2)$ かつ $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^N$.

Theorem (Zak)

Severi 多様体は以下のいずれかと射影同値:

1. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$: *Veronese* 曲面.
2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$: *Segre* 多様体.
3. $G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{14}$: *Grassmann* 多様体.
4. $E_6(\omega_1) \subset \mathbb{P}^{26}$: E_6 多様体.

$A \cong F_4(\omega_4)$ のとき

$\rightsquigarrow L$: 非常に豊富, i.e., $\phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^N$: 埋め込み.
$\rightsquigarrow A = X \cap H \subset X \subset \mathbb{P}^N$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: n 次元非退化非特異射影多様体
X: Severi 多様体 $\Leftrightarrow 3n = 2(N-2)$ かつ $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^N$.

Theorem (Zak)

Severi 多様体は以下のいずれかと射影同値:

1. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$: *Veronese 曲面.*
2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$: *Segre 多様体.*
3. $G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{14}$: *Grassmann 多様体.*
4. $E_6(\omega_1) \subset \mathbb{P}^{26}$: E_6 *多様体.*

$A \cong F_4(\omega_4)$ のとき

$\rightsquigarrow L$: 非常に豊富, i.e., $\phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^N$: 埋め込み.
$\rightsquigarrow A = X \cap H \subset X \subset \mathbb{P}^N$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: n 次元非退化非特異射影多様体
X: Severi 多様体 $\Leftrightarrow 3n = 2(N-2)$ かつ $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^N$.

Theorem (Zak)

Severi 多様体は以下のいずれかと射影同値:

1. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$: *Veronese 曲面.*
2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$: *Segre 多様体.*
3. $G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{14}$: *Grassmann 多様体.*
4. $E_6(\omega_1) \subset \mathbb{P}^{26}$: *$E_6$ 多様体.*

$A \cong F_4(\omega_4)$ のとき

$\rightsquigarrow L$: 非常に豊富, i.e., $\phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^N$: 埋め込み.
$\rightsquigarrow A = X \cap H \subset X \subset \mathbb{P}^N$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: n 次元非退化非特異射影多様体
X: Severi 多様体 $\Leftrightarrow 3n = 2(N-2)$ かつ $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^N$.

Theorem (Zak)

Severi 多様体は以下のいずれかと射影同値:

1. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$: *Veronese 曲面.*
2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$: *Segre 多様体.*
3. $G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{14}$: *Grassmann 多様体.*
4. $E_6(\omega_1) \subset \mathbb{P}^{26}$: *$E_6$ 多様体.*

$A \cong F_4(\omega_4)$ のとき

$\rightsquigarrow L$: 非常に豊富，i.e., $\phi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^N$: 埋め込み.
$\rightsquigarrow A = X \cap H \subset X \subset \mathbb{P}^N$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: n 次元非退化非特異射影多様体
X: Severi 多様体 $\Leftrightarrow 3n = 2(N-2)$ かつ $\mathrm{Sec}(X) \neq \mathbb{P}^N$.

Theorem (Zak)

Severi 多様体は以下のいずれかと射影同値:

1. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$: *Veronese 曲面.*
2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$: *Segre 多様体.*
3. $G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{14}$: *Grassmann 多様体.*
4. $E_6(\omega_1) \subset \mathbb{P}^{26}$: *$E_6$ 多様体.*

研究成果

等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類

1. 今まで知られていた結果 (藤田，Sommese 等) の一般化.
2. 他の分類問題への応用が期待される.

研究成果

等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類

1. 今まで知られていた結果 (藤田，Sommese 等) の一般化.
2. 他の分類問題への応用が期待される.

研究成果

等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類

1. 今まで知られていた結果 (藤田，Sommese 等) の一般化.
2. 他の分類問題への応用が期待される.

Kiwamu Watanabe, *Actions of linear algebraic groups of exceptional type on projective varieties*, Pacific Journal of Mathematics 239:2 (2009), pp. 391-395.（第 3 章に対応）

Problem

X: 射影多様体,
G: X に作用する単純線型代数群.
このとき，対 (X, G) を分類せよ.

Kiwamu Watanabe, *Actions of linear algebraic groups of exceptional type on projective varieties*, Pacific Journal of Mathematics 239:2 (2009), pp. 391-395.（第 3 章に対応）

Problem

X: 射影多様体,
G: X に作用する単純線型代数群.
このとき，対 (X, G) を分類せよ.

Known Results

Example

1. (満渕, '79)
   $G = SL(n)$, X: n 次元.
2. (梅村-向井, '83)
   $G = SL(2)$, X: 3 次元概等質.
3. (中野, '89)
   G: 単純線型代数群, X: 3 次元.
4. (S. Kebekus, '00)
   X: 3 次元特異.
5. (M. Andreatta, '01)
   G: 単純線型代数群, X: 高次元.

Known Results

Example

1. (満渕, '79)
   $G = SL(n)$, X: n 次元.
2. (梅村-向井, '83)
   $G = SL(2)$, X: 3 次元概等質.
3. (中野, '89)
   G: 単純線型代数群, X: 3 次元.
4. (S. Kebekus, '00)
   X: 3 次元特異.
5. (M. Andreatta, '01)
   G: 単純線型代数群, X: 高次元.

Known Results

Example

1. (満渕, '79)
   $G = SL(n)$, X: n 次元.
2. (梅村-向井, '83)
   $G = SL(2)$, X: 3 次元概等質.
3. (中野, '89)
   G: 単純線型代数群, X: 3 次元.
4. (S. Kebekus, '00)
   X: 3 次元特異.
5. (M. Andreatta, '01)
   G: 単純線型代数群, X: 高次元.

Known Results

Example

1. (満渕, '79)
   $G = SL(n)$, X: n 次元.
2. (梅村-向井, '83)
   $G = SL(2)$, X: 3 次元概等質.
3. (中野, '89)
   G: 単純線型代数群, X: 3 次元.
4. (S. Kebekus, '00)
   X: 3 次元特異.
5. (M. Andreatta, '01)
   G: 単純線型代数群, X: 高次元.

Known Results

Example

1. (満渕, '79)
   $G = SL(n)$, X: n 次元.
2. (梅村-向井, '83)
   $G = SL(2)$, X: 3 次元概等質.
3. (中野, '89)
   G: 単純線型代数群, X: 3 次元.
4. (S. Kebekus, '00)
   X: 3 次元特異.
5. (M. Andreatta, '01)
   G: 単純線型代数群, X: 高次元.

Known Results

Example

1. (満渕, '79)
   $G = SL(n)$, X: n 次元.
2. (梅村-向井, '83)
   $G = SL(2)$, X: 3 次元概等質.
3. (中野, '89)
   G: 単純線型代数群, X: 3 次元.
4. (S. Kebekus, '00)
   X: 3 次元特異.
5. (M. Andreatta, '01)
   G: 単純線型代数群, X: 高次元.

Andreatta's Work

Definition

$r_G :=$ min$\{\dim G/P \mid P \subset G :$ 放物型部分群 $\}$.

Proposition (M. Andreatta, '01)

(1) $n \geq r_G$,
(2) もし $n = r_G$ なら, X は次のいずれかに同型
$\mathbb{P}^n$, Q^n, $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$.
特に, X は有理等質多様体.

Andreatta's Work

Definition

$r_G := \min\{\dim G/P \mid P \subset G : 放物型部分群\}$.

Proposition (M. Andreatta, '01)

(1) $n \geq r_G$,
(2) もし $n = r_G$ なら, X は次のいずれかに同型
$\mathbb{P}^n$, Q^n, $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$.
特に, X は有理等質多様体.

Andreatta's Work

Definition

$r_G :=$ min$\{\dim G/P \mid P \subset G :$ 放物型部分群 $\}$.

Proposition (M. Andreatta, '01)

(1) $n \geq r_G$,
(2) もし $n = r_G$ なら, X は次のいずれかに同型
$\mathbb{P}^n$, Q^n, $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ *or* $G_2(\omega_2)$.
特に, X は有理等質多様体.

Theorem (M. Andreatta, '01)

G: 古典型かつ $n = r_G + 1$ なら X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^n$,
(2) Q^n,
(3) $Y \times Z$, ただし, Y: $\mathbb{P}^{n-1}$ or Q^{n-1}, Z: 非特異曲線,
(4) $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(m))$, ただし, Y:(3) と同じ, $m > 0$,
(5) $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$,
(6) $C_2(\omega_1 + \omega_2)$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:

(1) $\mathbb{P}^6$,
(2) Q^6,
(3) $E_6(\omega_1)$,
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^6$,
(2) Q^6,
(3) $E_6(\omega_1)$,
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^6$,
(2) Q^6,
(3) $E_6(\omega_1)$,
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^6$,
(2) Q^6,
(3) $E_6(\omega_1)$,
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:

(1) $\mathbb{P}^6$,

(2) Q^6,

(3) $E_6(\omega_1)$,

(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,

(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,

(6) $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^6$,
(2) Q^6,
(3) $E_6(\omega_1)$,
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^6$,
(2) Q^6,
(3) $E_6(\omega_1)$,
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

Theorem (W)

G: 例外型かつ $n = r_G + 1$ なら，X は以下のいずれか:
(1) $\mathbb{P}^6$, G_2
(2) Q^6, G_2
(3) $E_6(\omega_1)$, F_4
(4) $G_2(\omega_1 + \omega_2)$,
(5) $Y \times Z$, ただし，Y: $E_6(\omega_1)$, $E_7(\omega_1)$, $E_8(\omega_1)$, $F_4(\omega_1)$, $F_4(\omega_4)$, $G_2(\omega_1)$ or $G_2(\omega_2)$, Z: 非特異曲線,
(6) $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y(m))$, ただし，$Y$: (5) と同じ，$m > 0$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists \phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.

$G \curvearrowright F =$ (fiber of ϕ): 非自明.

$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.

$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.

$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.

$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists \phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.

$G \curvearrowright F =$ (fiber of ϕ): 非自明.

$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.

$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.

$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.

$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists\phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.

$G \curvearrowright F =$ (fiber of ϕ): 非自明.

$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.

$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.

$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.

$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists \phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.

$G \curvearrowright F$ = (fiber of ϕ): 非自明.

$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.

$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.

$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.

$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists \phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.
$G \curvearrowright F = (\text{fiber of } \phi)$: 非自明.
$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.
$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.
$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists \phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.
$G \curvearrowright F =$ (fiber of ϕ): 非自明.
$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.
$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.
$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists\phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.
$G \curvearrowright F =$ (fiber of ϕ): 非自明.
$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.
$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.
$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

証明方針

Lemma (梅村-向井, '83)

1. $\exists \phi : X \to Z$: 端射線の収縮射,
2. ϕ が G 同値になるように G は Z に作用する.

方針

$\phi : X \to Z$ と G 軌道の関係 $\rightsquigarrow$ X の構造決定

Example: $\dim X > \dim Z > 0$ かつ $G \curvearrowright Z$:自明のとき.
$G \curvearrowright F =$ (fiber of ϕ): 非自明.
$\exists Gp \subset F$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim Gp \leq \dim F \leq n - 1$.
$\rightsquigarrow (\dim F, \dim Z) = (n-1, 1)$ and F : G-等質.
$\rightsquigarrow X \cong F \times Z$.

$\rho(X) = 1$ のとき.

$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.

X: G-等質でない.

$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.

$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.

H: 以下のいずれかと同型:

$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.

Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.

$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.

$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.

X: G-等質でない.

$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.

$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.

H: 以下のいずれかと同型:

$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.

Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.

$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

$\rho(X) = 1$ のとき.
$\rightsquigarrow X$: Fano 多様体, Pic $X \cong \mathbb{Z}$.
X: G-等質でない.
$\exists H = Gp \subset X$: 閉軌道.
$n - 1 = r_G \leq \dim H < n$.
H: 以下のいずれかと同型:
$E_6(\omega_1), E_7(\omega_1), E_8(\omega_1), F_4(\omega_1), F_4(\omega_4), G_2(\omega_1), G_2(\omega_2)$.
Pic $X \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow H$: X 上の豊富な因子.
$(X, H) \cong (E_6(\omega_1), F_4(\omega_4)), (\mathbb{P}^6, Q^5)$ or (Q^6, Q^5).

研究成果

$n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.

1. Andreatta の結果と合わせると, $n = r_G + 1$ なる代数群の作用をもつ射影多様体の完全な分類を得る.
2. 先の偏極多様体の結果の応用例.

研究成果

$n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.

1. Andreatta の結果と合わせると, $n = r_G + 1$ なる代数群の作用をもつ射影多様体の完全な分類を得る.
2. 先の偏極多様体の結果の応用例.

研究成果

$n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.

1. Andreatta の結果と合わせると，$n = r_G + 1$ なる代数群の作用をもつ射影多様体の完全な分類を得る.
2. 先の偏極多様体の結果の応用例.

Kiwamu Watanabe, *Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds*, June 2009, submitted.（第 4 章に対応）

Definition

Fano 多様体 $\Leftrightarrow$ 豊富な反標準因子をもつ非特異射影多様体.

Problem (Special Case 1)

$X \subset \mathbb{P}^N$ を Picard 数 1 の Fano 多様体とする．もし X が line で覆われるなら, X 上の一般の 2 点は何本の line で結べるか?

l: the min length of connected chains of lines joining two gen pts.

Kiwamu Watanabe, *Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds*, June 2009, submitted.（第 4 章に対応）

Definition

Fano 多様体 $\Leftrightarrow$ 豊富な反標準因子をもつ非特異射影多様体.

Problem (Special Case 1)

$X \subset \mathbb{P}^N$ を *Picard* 数 1 の *Fano* 多様体とする．もし X が *line* で覆われるなら, X 上の一般の 2 点は何本の *line* で結べるか?

l: the min length of connected chains of lines joining two gen pts.

Kiwamu Watanabe, *Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds*, June 2009, submitted.（第 4 章に対応）

Definition

Fano 多様体 ⇔ 豊富な反標準因子をもつ非特異射影多様体.

Problem (Special Case 1)

$X \subset \mathbb{P}^N$ を *Picard* 数 1 の *Fano* 多様体とする．もし X が *line* で覆われるなら, X 上の一般の *2* 点は何本の *line* で結べるか?

l: the min length of connected chains of lines joining two gen pts.

Kiwamu Watanabe, *Lengths of chains of minimal rational curves on Fano manifolds*, June 2009, submitted.（第 4 章に対応）

Definition

Fano 多様体 $\Leftrightarrow$ 豊富な反標準因子をもつ非特異射影多様体.

Problem (Special Case 1)

$X \subset \mathbb{P}^N$ を *Picard* 数 1 の *Fano* 多様体とする．もし X が *line* で覆われるなら, X 上の一般の *2* 点は何本の *line* で結べるか?

l: the min length of connected chains of lines joining two gen pts.

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow l = 2.$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow l = 2.$

Proof of (3).
$x, y \in G(2, \mathbb{C}^6)$: 一般

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow l = 2.$

Proof of (3).
$x, y \in G(2, \mathbb{C}^6)$: 一般
$\longleftrightarrow L_x, L_y \subset \mathbb{C}^6$: 2 次元.

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow l = 2.$

Proof of (3).
$x, y \in G(2, \mathbb{C}^6)$: 一般
$\longleftrightarrow L_x, L_y \subset \mathbb{C}^6$: 2 次元.
$V :=< L_x, L_y >\subset \mathbb{C}^6$: 4 次元.

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1.$
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2.$
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow l = 2.$

Proof of (3).
$x, y \in G(2, \mathbb{C}^6)$: 一般
$\longleftrightarrow L_x, L_y \subset \mathbb{C}^6$: 2 次元.
$V := < L_x, L_y > \subset \mathbb{C}^6$: 4 次元.
$x, y \in G(2, V) \subset G(2, \mathbb{C}^6)$ and $G(2, V) \cong Q^4$.

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow l = 1$.
2. $X = Q^n \ (n \geq 3) \Rightarrow l = 2$.
3. $X = G(2, \mathbb{C}^6) \subset \mathbb{P}^{14} \Rightarrow l = 2$.

Proof of (3).
$x, y \in G(2, \mathbb{C}^6)$: 一般
$\longleftrightarrow L_x, L_y \subset \mathbb{C}^6$: 2 次元.
$V := < L_x, L_y > \subset \mathbb{C}^6$: 4 次元.
$x, y \in G(2, V) \subset G(2, \mathbb{C}^6)$ and $G(2, V) \cong Q^4$.
よって， $l = 2$.

$X \subset \mathbb{P}^N$: line で覆われない Picard 数 1 の Fano 多様体.
(e.g. $i_X = 1$)
X は conic で覆われるとする.

Problem (Special Case 2)

X 上の一般の 2 点を結ぶためには何本の conic が必要か?

(e.g. $(N) \subset \mathbb{P}^N$: 次数 N の一般の超曲面.)

$X \subset \mathbb{P}^N$: line で覆われない Picard 数 1 の Fano 多様体.
(e.g. $i_X = 1$)
X は conic で覆われるとする.

Problem (Special Case 2)

X 上の一般の 2 点を結ぶためには何本の conic が必要か?

(e.g. $(N) \subset \mathbb{P}^N$: 次数 N の一般の超曲面.)

$X \subset \mathbb{P}^N$: line で覆われない Picard 数 1 の Fano 多様体.
(e.g. $i_X = 1$)
X は conic で覆われるとする.

Problem (Special Case 2)

X 上の一般の 2 点を結ぶためには何本の conic が必要か?

(e.g. $(N) \subset \mathbb{P}^N$: 次数 N の一般の超曲面.)

◇ 定数でない射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し, $f(\mathbb{P}^1)$: 有理曲線.
◇ $\mathrm{RatCurves}^n(X) := \{X$ 上の有理曲線 $\}^{\text{normalization}}$.

$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}[H]$ (H は豊富) と仮定.

既約成分 $\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ に対し,
◇ $d_{\mathscr{K}} := H.C$ for $[C] \in \mathscr{K}$: $\mathscr{K}$ の次数
◇ $\mathscr{K}$: dominating irr comp $\Leftrightarrow \overline{\bigcup_{[C]\in\mathscr{K}} C} = X$.

Definition

$\mathscr{K}$: minimal rational component $\Leftrightarrow$ 次数最小の dom irr comp.

Remark

1. X: line で覆われる $\Rightarrow \mathscr{K}$: line の族.
2. X: line で覆われないが conic で覆われる $\Rightarrow \mathscr{K}$: conic の族.

◇ 定数でない射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し，$f(\mathbb{P}^1)$: 有理曲線.
◇ $\mathrm{RatCurves}^n(X) := \{X$ 上の有理曲線 $\}^{\mathrm{normalization}}$.

$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}[H]$ (H は豊富) と仮定.

既約成分 $\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ に対し，
◇ $d_{\mathscr{K}} := H.C$ for $[C] \in \mathscr{K}$: $\mathscr{K}$ の次数
◇ $\mathscr{K}$: dominating irr comp $\Leftrightarrow \overline{\bigcup_{[C]\in\mathscr{K}} C} = X$.

Definition

$\mathscr{K}$: minimal rational component $\Leftrightarrow$ 次数最小の dom irr comp.

Remark

1. X: line で覆われる $\Rightarrow \mathscr{K}$: line の族.
2. X: line で覆われないが conic で覆われる $\Rightarrow \mathscr{K}$: conic の族.

$\diamond$ 定数でない射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し, $f(\mathbb{P}^1)$: 有理曲線.
$\diamond$ $\mathrm{RatCurves}^n(X) := \{X$ 上の有理曲線 $\}^{\mathrm{normalization}}$.

Pic$(X) \cong \mathbb{Z}[H]$ (H は豊富) と仮定.

既約成分 $\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ に対し,
$\diamond$ $d_{\mathscr{K}} := H.C$ for $[C] \in \mathscr{K}$: $\mathscr{K}$ の次数
$\diamond$ $\mathscr{K}$: dominating irr comp $\Leftrightarrow$ $\overline{\bigcup_{[C]\in\mathscr{K}} C} = X$.

Definition

$\mathscr{K}$: minimal rational component $\Leftrightarrow$ 次数最小の dom irr comp.

Remark

1. X: line で覆われる $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$: line の族.
2. X: line で覆われないが conic で覆われる $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$: conic の族.

◇ 定数でない射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し, $f(\mathbb{P}^1)$: 有理曲線.
◇ $\mathrm{RatCurves}^n(X) := \{X \text{ 上の有理曲線}\}^{\text{normalization}}$.

Pic$(X) \cong \mathbb{Z}[H]$ (H は豊富) と仮定.

既約成分 $\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ に対し,
◇ $d_{\mathscr{K}} := H.C$ for $[C] \in \mathscr{K}$: $\mathscr{K}$ の次数
◇ $\mathscr{K}$: dominating irr comp $\Leftrightarrow$ $\overline{\bigcup_{[C]\in\mathscr{K}} C} = X$.

Definition

$\mathscr{K}$: minimal rational component $\Leftrightarrow$ 次数最小の dom irr comp.

Remark

1. X: line で覆われる $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$: line の族.
2. X: line で覆われないが conic で覆われる $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$: conic の族.

◇ 定数でない射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し, $f(\mathbb{P}^1)$: 有理曲線.
◇ $\mathrm{RatCurves}^n(X) := \{X \text{ 上の有理曲線 }\}^{\mathrm{normalization}}$.

Pic$(X) \cong \mathbb{Z}[H]$ (H は豊富) と仮定.

既約成分 $\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ に対し,
◇ $d_{\mathscr{K}} := H.C$ for $[C] \in \mathscr{K}$: $\mathscr{K}$ の次数
◇ $\mathscr{K}$: dominating irr comp $\Leftrightarrow$ $\overline{\bigcup_{[C]\in\mathscr{K}} C} = X$.

Definition

$\mathscr{K}$: minimal rational component $\Leftrightarrow$ 次数最小の dom irr comp.

Remark

1. X: line で覆われる $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$: line の族.
2. X: line で覆われないが conic で覆われる $\Rightarrow$ $\mathscr{K}$: conic の族.

Problem

Problem (Hwang-Kebekus '05)

X 上の一般の 2 点は何本の $\mathscr{K}$-curve により結べるか?

$l_{\mathscr{K}}$:= the min length of connected chains of general $\mathscr{K}$-curves joining two gen pts.

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{lines in } \mathbb{P}^n\}, l_{\mathscr{K}} = 1.$
2. $X = Q^n \Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{lines in } Q^n\}, l_{\mathscr{K}} = 2.$
3. $X = (N) \subset \mathbb{P}^N$: 次数 N の一般の超曲面
   $\Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{conics in } (N)\}.$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{lines in } \mathbb{P}^n\}, l_{\mathscr{K}} = 1.$
2. $X = Q^n \Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{lines in } Q^n\}, l_{\mathscr{K}} = 2.$
3. $X = (N) \subset \mathbb{P}^N$: 次数 N の一般の超曲面
   $\Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{conics in } (N)\}.$

Example

1. $X = \mathbb{P}^n \Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{lines in } \mathbb{P}^n\}, l_{\mathscr{K}} = 1.$
2. $X = Q^n \Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{lines in } Q^n\}, l_{\mathscr{K}} = 2.$
3. $X = (N) \subset \mathbb{P}^N$: 次数 N の一般の超曲面
   $\Rightarrow \mathscr{K} = \{\text{conics in } (N)\}.$

Motivation [Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92]
Boundedness of Fano manifolds

Theorem (Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, *Picard* 数 1 の n 次元 *Fano* 多様体の変形類は高々有限個.

Theorem (Nadel, Kollár-Miyaoka-Mori)

$l_{\mathscr{K}} \leq n$

Theorem

$0 < (-K_X)^n \leq (n(n+1))^n.$

Motivation [Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92]
Boundedness of Fano manifolds

Theorem (Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, *Picard* 数 1 の n 次元 *Fano* 多様体の変形類は高々有限個.

Theorem (Nadel, Kollár-Miyaoka-Mori)

$l_{\mathscr{K}} \leq n$

Theorem

$0 < (-K_X)^n \leq (n(n+1))^n.$

Motivation [Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92]
Boundedness of Fano manifolds

Theorem (Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, *Picard* 数 1 の n 次元 *Fano* 多様体の変形類は高々有限個.

Theorem (Nadel, Kollár-Miyaoka-Mori)

$l_{\mathscr{K}} \leq n$

Theorem

$0 < (-K_X)^n \leq (n(n+1))^n.$

Motivation [Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92]

Boundedness of Fano manifolds

Theorem (Nadel '91, Kollár-Miyaoka-Mori '92)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, *Picard* 数 1 の n 次元 *Fano* 多様体の変形類は高々有限個.

Theorem (Nadel, Kollár-Miyaoka-Mori)

$l_{\mathscr{K}} \leq n$

Theorem

$0 < (-K_X)^n \leq (n(n+1))^n.$

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) := n + 1 - i_X \leq 3$,
3. X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$,
4. X が二重被覆の構造をもち line で覆われるとき.

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) := n + 1 - i_X \leq 3$,
3. X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$,
4. X が二重被覆の構造をもち line で覆われるとき.

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) := n + 1 - i_X \leq 3$,
3. X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$,
4. X が二重被覆の構造をもち line で覆われるとき.

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) := n + 1 - i_X \leq 3$,
3. X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$,
4. X が二重被覆の構造をもち line で覆われるとき.

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) := n + 1 - i_X \leq 3$,
3. X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$,
4. X が二重被覆の構造をもち line で覆われるとき.

Known results and our goal

Definition i_X: X の Fano 指数 $\Leftrightarrow -K_X = i_X H$.

Theorem (Hwang-Kebekus '05, Ionescu-Russo '07)

X: n 次元 prime Fano $\neq \mathbb{P}^n$ が $i_X > \frac{2}{3}n$ を満たすならば, $l_{\mathscr{K}} = 2$.

Definition X: prime Fano $\Leftrightarrow$ H: 非常に豊富.

以下の四つの場合に lenght を求めた:

1. $n \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) := n + 1 - i_X \leq 3$,
3. X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$,
4. X が二重被覆の構造をもち line で覆われるとき.

Notation

X: n 次元 Fano 多様体 s.t. $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ $(n \geq 3)$,
$\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$: min rat comp,
$l_{\mathscr{K}}$: the min length of connected chains of general $\mathscr{K}$-curves joining two gen pts.

Basic Property

一般の $[C] \in \mathscr{K}$ に対し, $f^*T_X \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^p \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-1-p}$, ただし, $f : \mathbb{P}^1 \to X$ は C の正規化.

$p = i_X d_{\mathscr{K}} - 2$ $(0 \leq p \leq n-1)$.

Notation

X: n 次元 Fano 多様体 s.t. $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ $(n \geq 3)$,
$\mathscr{K} \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$: min rat comp,
$l_{\mathscr{K}}$: the min length of connected chains of general $\mathscr{K}$-curves joining two gen pts.

Basic Property

一般の $[C] \in \mathscr{K}$ に対し, $f^*T_X \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^p \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-1-p}$, ただし, $f : \mathbb{P}^1 \to X$ は C の正規化.

$p = i_X d_{\mathscr{K}} - 2$ $(0 \leq p \leq n-1)$.

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2		4	3		5	4		
3	1		4	2		5	3		
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2		4	3		5	4		
3	1		4	2		5	3		
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2		4	3		5	4		$\mathbb{P}^n$
3	1		4	2		5	3		
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1		4	2		5	3		
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1		4	2		5	3		
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1		4	2		5	3		Q^n
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0		4	1		5	2		
			4	0		5	1		
						5	0		$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1		5	2		
			4	0	4	5	1		
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1		5	2		
			4	0	4	5	1		
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$.
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3$.

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1		5	2		
			4	0	4	5	1		
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1	2	5	2		
			4	0	4	5	1		
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$.
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3$.

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1	2	5	2	2	
			4	0	4	5	1		
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \le 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1	2	5	2	2	
			4	0	4	5	1	3	
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1	2	5	2	2	
			4	0	4	5	1	3	
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

Table of $l_{\mathscr{K}}$ $(n \leq 5)$

Theorem 1 (W)

$p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2.$
$(n, p) = (5, 1) \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 3.$

n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	n	p	$l_{\mathscr{K}}$	
3	2	1	4	3	1	5	4	1	$\mathbb{P}^n$
3	1	2	4	2	2	5	3	2	Q^n
3	0	3	4	1	2	5	2	2	
			4	0	4	5	1	3	
						5	0	5	$p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$

特に, $n \leq 5$ なら, $l_{\mathscr{K}}$ は (n, p) にのみ依存する.

$\mathrm{coindex}(X) \leq 3$

$\mathrm{coindex}(X)$	X	$l_{\mathscr{K}}$
0	$\mathbb{P}^n$	1
1	Q^n	2
2	del Pezzo 3-fold	
2	del Pezzo n-fold $(n > 3)$	

$\mathrm{coindex}(X) \leq 3$

$\mathrm{coindex}(X)$	X	$l_{\mathscr{K}}$
0	$\mathbb{P}^n$	1
1	Q^n	2
2	del Pezzo 3-fold	
2	del Pezzo n-fold $(n > 3)$	

Remark 1: $\mathrm{coindex}(X) = 2 \Rightarrow p = n - 3$.

$\mathrm{coindex}(X) \leq 3$

$\mathrm{coindex}(X)$	X	$l_{\mathscr{K}}$
0	$\mathbb{P}^n$	1
1	Q^n	2
2	del Pezzo 3-fold	
2	del Pezzo n-fold $(n > 3)$	

Remark 1: $\mathrm{coindex}(X) = 2 \Rightarrow p = n - 3$.
Remark 2: $p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$.

$\mathrm{coindex}(X) \leq 3$

$\mathrm{coindex}(X)$	X	$l_{\mathscr{K}}$
0	$\mathbb{P}^n$	1
1	Q^n	2
2	del Pezzo 3-fold	3
2	del Pezzo n-fold $(n > 3)$	

Remark 1: $\mathrm{coindex}(X) = 2 \Rightarrow p = n - 3$.
Remark 2: $p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$.

$\mathrm{coindex}(X) \leq 3$

$\mathrm{coindex}(X)$	X	$l_{\mathscr{K}}$
0	$\mathbb{P}^n$	1
1	Q^n	2
2	del Pezzo 3-fold	3
2	del Pezzo n-fold $(n > 3)$	

Remark 1: $\mathrm{coindex}(X) = 2 \Rightarrow p = n - 3$.
Remark 2: $p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$.
Thm 1: $p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$.

$\mathrm{coindex}(X) \leq 3$

$\mathrm{coindex}(X)$	X	$l_{\mathscr{K}}$
0	$\mathbb{P}^n$	1
1	Q^n	2
2	del Pezzo 3-fold	3
2	del Pezzo n-fold $(n > 3)$	2

Remark 1: $\mathrm{coindex}(X) = 2 \Rightarrow p = n - 3$.
Remark 2: $p = 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = n$.
Thm 1: $p = n - 3 > 0 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$.

Theorem 2 (W)

$\mathrm{coindex}(X) = 3, n \geq 6 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$ *except the case* $X = LG(3,6)$*:* 6*-dim Lagrangian Grassmann.*

$LG(3,6) := \{[V] \in G(3,6) | \omega(V,V) = 0\}$, ω: symple form on $\mathbb{C}^6$.

Theorem 2 (W)

$\mathrm{coindex}(X) = 3, n \geq 6 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$ *except the case* $X = LG(3,6)$*: 6-dim Lagrangian Grassmann.*

$LG(3,6) := \{[V] \in G(3,6) | \omega(V,V) = 0\}$, ω: symple form on $\mathbb{C}^6$.

n	$l_{\mathscr{K}}$
$n \geq 7$	2
6	2 or 3
5	3
4	4
3	3

Theorem 2 (W)

$\mathrm{coindex}(X) = 3, n \geq 6 \Rightarrow l_{\mathscr{K}} = 2$ *except the case* $X = LG(3,6)$*:* 6*-dim Lagrangian Grassmann.*

$LG(3,6) := \{[V] \in G(3,6) | \omega(V,V) = 0\}$, ω: symple form on $\mathbb{C}^6$.

n	$l_{\mathscr{K}}$
$n \geq 7$	2
6	2 or 3
5	3
4	4
3	3

$n \geq 4 \Rightarrow p = n - 4$. よって，$l_{\mathscr{K}}$ は一般に (n,p) のみでは定まらない.

X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$

Theorem (W)

X: *prime Fano*, $i_X = \frac{2}{3}n$. そのとき以下の場合を除いて $l_{\mathscr{K}} = 2$:

1. $(3) \subset \mathbb{P}^4$: 次数 3 の超曲面.
2. $(2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$: *2*つの *2*次超曲面の完全交叉.
3. $G(2,5) \cap (1)^3 \subset \mathbb{P}^6$: $G(2,5)$ の *3*次元の線形切断.
4. $LG(3,6)$: *Lagrangian Grass* .
5. $G(3,6)$: *Grass*.
6. $S_5 := \mathbb{F}_5(Q^{10})^+$: 15 次元 *spinor* 多様体.
7. $E_7(\omega_1)$: E_7 型の 27 次元有理等質多様体.

上記例外の場合, $l_{\mathscr{K}} = 3$.

X: prime and $i_X = \frac{2}{3}n$

Theorem (W)

X: *prime Fano*, $i_X = \frac{2}{3}n$. そのとき以下の場合を除いて $l_{\mathscr{K}} = 2$:

1. $(3) \subset \mathbb{P}^4$: 次数 3 の超曲面.
2. $(2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$: *2* つの *2* 次超曲面の完全交叉.
3. $G(2,5) \cap (1)^3 \subset \mathbb{P}^6$: $G(2,5)$ の *3* 次元の線形切断.
4. $LG(3,6)$: *Lagrangian Grass* .
5. $G(3,6)$: *Grass*.
6. $S_5 := \mathbb{F}_5(Q^{10})^+$: 15 次元 *spinor* 多様体.
7. $E_7(\omega_1)$: E_7 型の 27 次元有理等質多様体.

上記例外の場合, $l_{\mathscr{K}} = 3$.

Definition

1. $X \subset \mathbb{P}^N$: conic-connected $\Leftrightarrow$ X 上の一般の 2 点は X 上の conic により結ばれる.
2. $SX := \overline{\bigcup_{x \neq y \in X} < x, y >}$: X の割線多様体.

Remark: $\dim SX \leq 2n+1$.

Definition

$X \subset \mathbb{P}^N$: defective $\Leftrightarrow$ $\dim SX < 2n+1$.

Corollary (W)

X: *prime Fano*, $i_X = \frac{2}{3}n$ かつ $n \geq 6$. このとき以下は同値.

1. $l_{\mathscr{K}} \neq 2$.
2. $l_{\mathscr{K}} = 3$.
3. $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathscr{O}_X(H)))$: *conic-connected* でない.
4. $\dim S^1 X = 2n+1$.
5. $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathscr{O}_X(H)))$ は次のいずれかに射影同値 $LG(3,6)$, $G(3,6)$, S_5 *or* $E_7(\omega_1)$.

Corollary (W)

X: *prime Fano*, $i_X = \frac{2}{3}n$ かつ $n \geq 6$. このとき以下は同値.

1. $l_{\mathscr{K}} \neq 2$.
2. $l_{\mathscr{K}} = 3$.
3. $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathscr{O}_X(H)))$: *conic-connected* でない.
4. $\dim S^1 X = 2n + 1$.
5. $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathscr{O}_X(H)))$ は次のいずれかに射影同値 $LG(3,6)$, $G(3,6)$, S_5 *or* $E_7(\omega_1)$.

Property	$i_X > \frac{2}{3}n$	$i_X = \frac{2}{3}n$	$i_X = \frac{2}{3}n$
$l_{\mathscr{K}}$	2	2	3
Conic-connectedness	Yes	Yes	No
Defectiveness of the sec var	Yes	Yes	No

$i_X = \frac{2}{3}n$ は conic-connectedness や割線多様体の defectiveness からみても境界になっている.

Property	$i_X > \frac{2}{3}n$	$i_X = \frac{2}{3}n$	$i_X = \frac{2}{3}n$
$l_{\mathscr{K}}$	2	2	3
Conic-connectedness	Yes	Yes	No
Defectiveness of the sec var	Yes	Yes	No

$i_X = \frac{2}{3}n$ は conic-connectedness や割線多様体の defectiveness からみても境界になっている.

研究成果

以下の場合に対し，Fano 多様体の length を求めた.

1. $\dim X \leq 5$,
2. $\mathrm{coindex}(X) \leq 3$,
3. X: prime かつ $i_X = \frac{2}{3}\dim X$,
4. X: 2 重被覆の構造をもち，次数 1 の有理曲線で覆われる.

Summary

1. 等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類.
2. $n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.
3. 以下の場合に対し，ファノ多様体の length を求めた.
   1. $\dim X \leq 5$,
   2. $\mathrm{coindex}(X) \leq 3$,
   3. X: prime かつ $i_X = \frac{2}{3} \dim X$,
   4. X: 2 重被覆の構造をもち，次数 1 の有理曲線で覆われる.

Summary

1. 等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類.
2. $n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.
3. 以下の場合に対し，ファノ多様体の length を求めた.
   1. $\dim X \leq 5$,
   2. $\mathrm{coindex}(X) \leq 3$,
   3. X: prime かつ $i_X = \frac{2}{3} \dim X$,
   4. X: 2 重被覆の構造をもち，次数 1 の有理曲線で覆われる.

Summary

1. 等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類.
2. $n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.
3. 以下の場合に対し，ファノ多様体の length を求めた.
    1. $\dim X \leq 5$,
    2. $\mathrm{coindex}(X) \leq 3$,
    3. X: prime かつ $i_X = \frac{2}{3}\dim X$,
    4. X: 2 重被覆の構造をもち，次数 1 の有理曲線で覆われる.

Summary

1. 等質多様体を豊富な因子として含む偏極多様体の分類.
2. $n = r_G + 1$ なる例外型代数群の作用をもつ射影多様体の分類.
3. 以下の場合に対し，ファノ多様体の length を求めた.
    1. $\dim X \leq 5$,
    2. $\mathrm{coindex}(X) \leq 3$,
    3. X: prime かつ $i_X = \frac{2}{3} \dim X$,
    4. X: 2 重被覆の構造をもち，次数 1 の有理曲線で覆われる.