射影空間の低次数被覆空間を超平面切断として含む偏極多様体の分類

Classification of polarized manifolds admitting a low degree cover of projective space among their hyperplane sections

学位申請者: 網谷 泰治
指導教員: 楫 元

偏極多様体と超平面切断

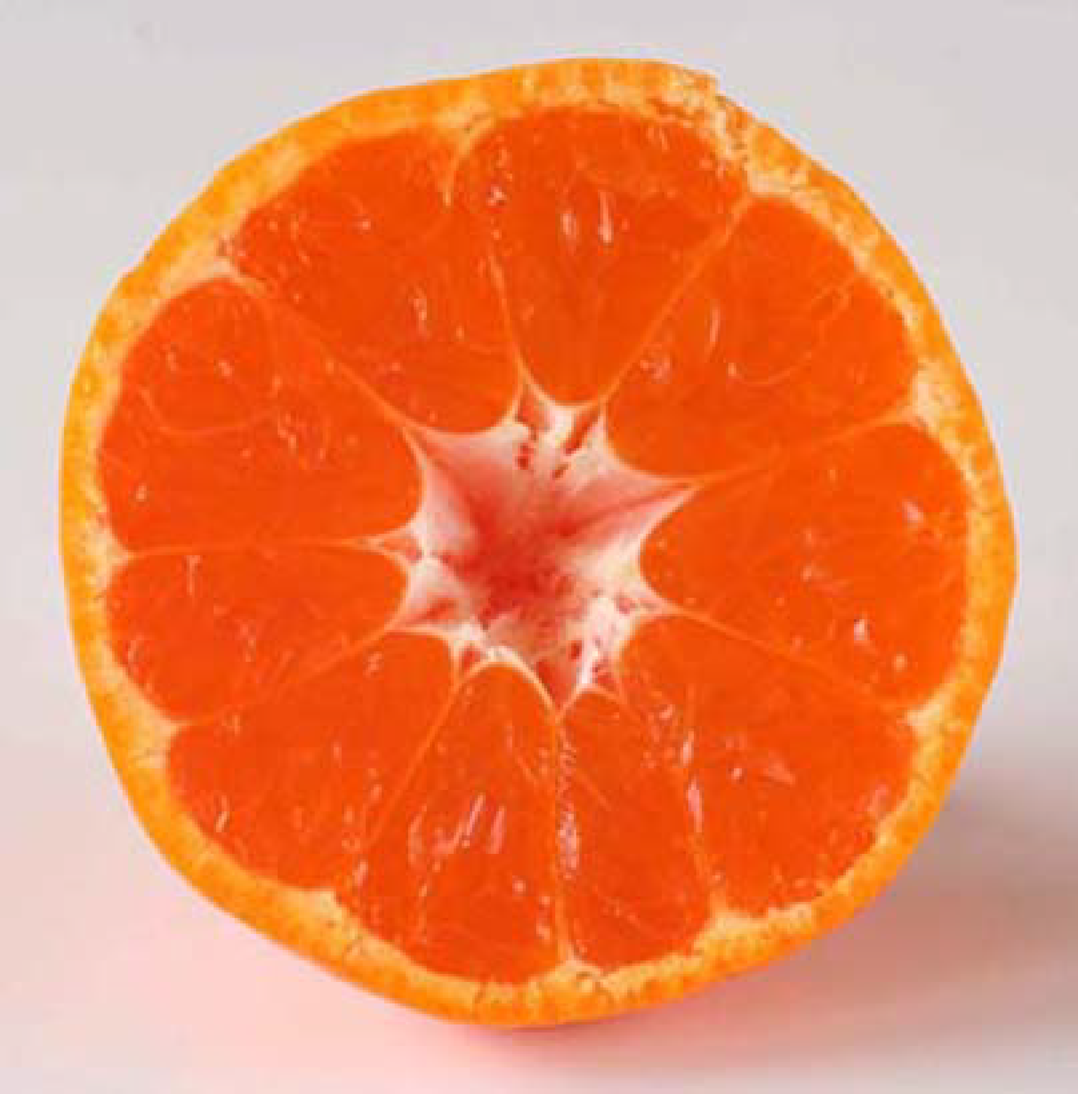
(X, L): 偏極多様体 $\overset{\text{def}}{\iff}$ X: compact 複素多様体

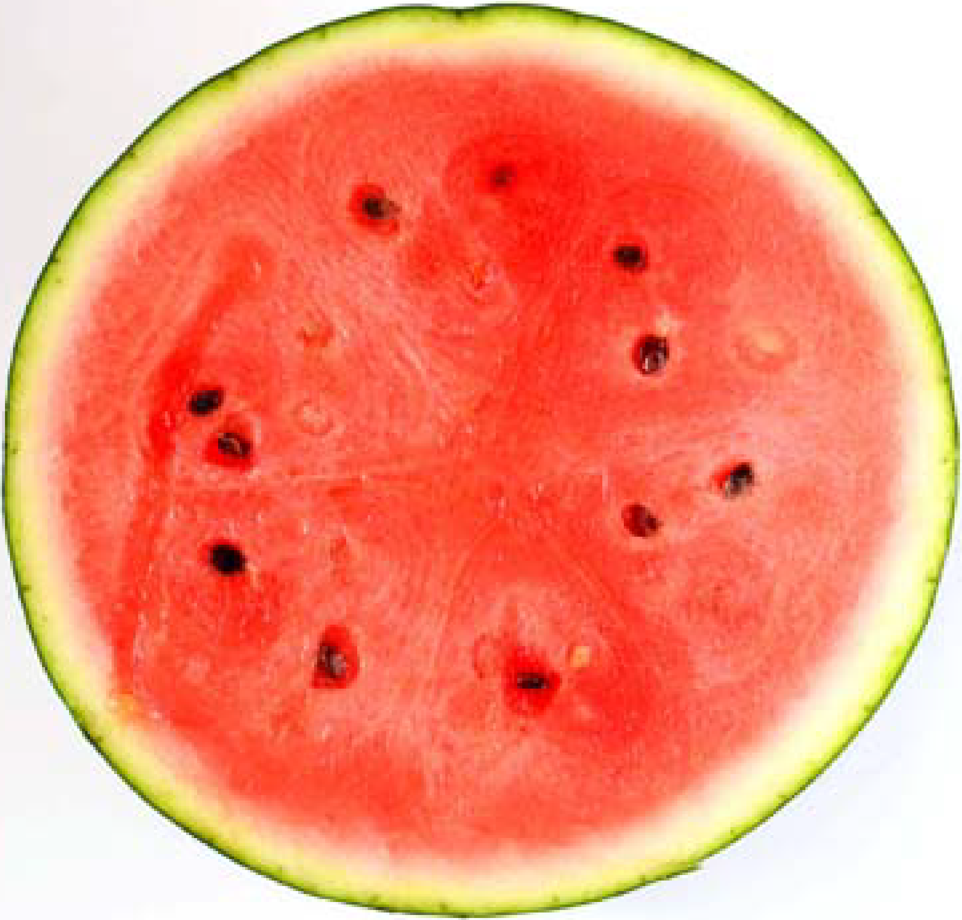
L: $\underline{\text{very ample}}$ 直線束

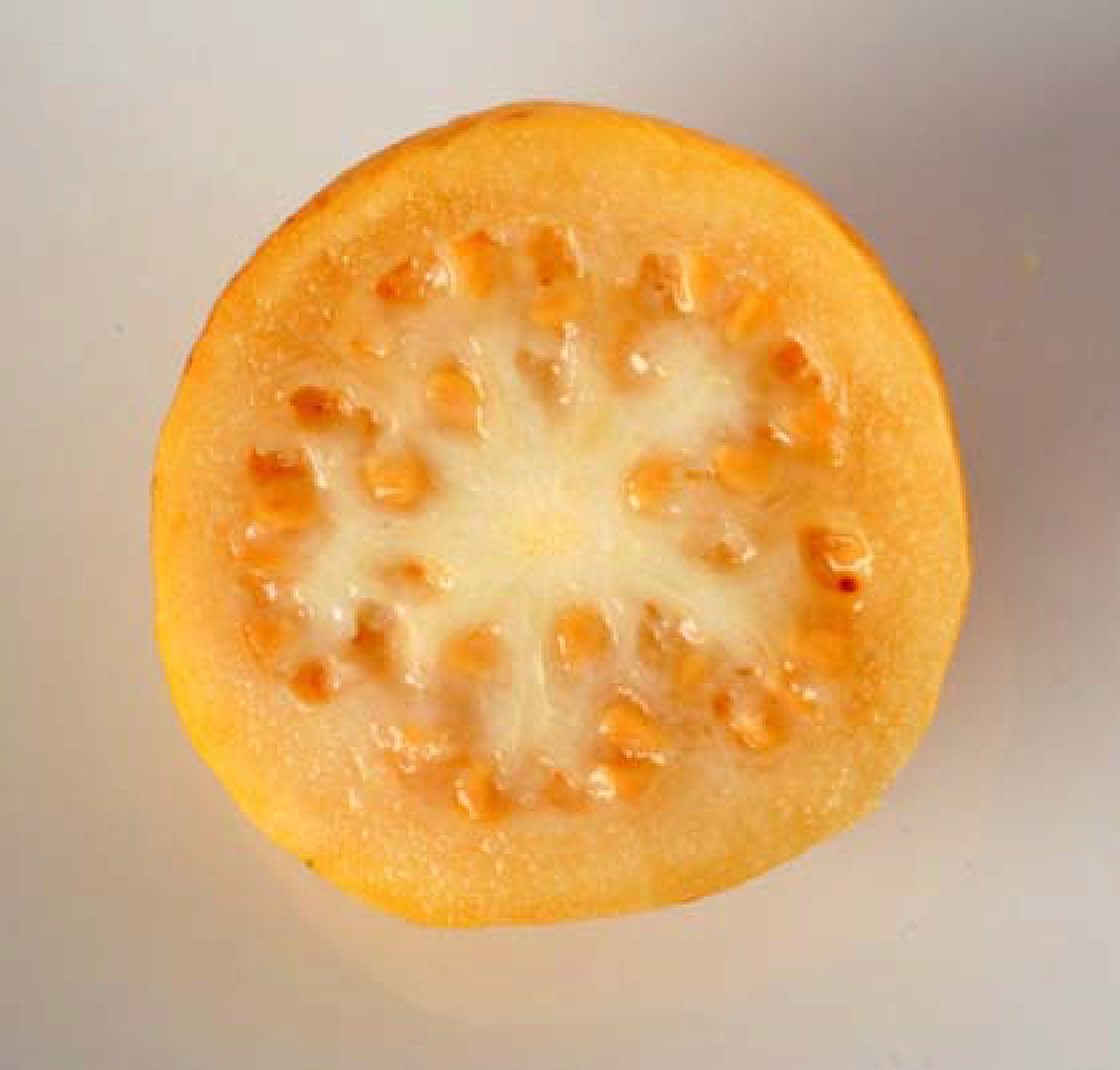
$\longleftrightarrow$ $X \overset{\Gamma(X,L)}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$: 射影多様体

$H \subseteq \mathbb{P}^N$: 超平面に対し,

超平面切断 $A := X \cap H$ の性質 $\rightsquigarrow$ 偏極多様体 (X, L) の性質







学位論文の内容

1. 射影空間の低次数被覆空間を超平面切断として含む偏極多様体の分類:

   (a) 5 次被覆の場合 [1]; (b) 4 次被覆の場合 [2].

2. Castelnuovo 多様体を超平面切断として含む偏極多様体の分類 [3].

論文リスト

[1] **Y. Amitani,** *Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, **J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 1119–1131.**

[2] **Y. Amitani,** *Projective manifolds with hyperplane sections being four-sheeted covers of projective space*, **Proc. Japan Acad. 82 (2006), 8–13.**

[3] **Y. Amitani,** *On the structure of polarized manifolds containing Castelnuovo varieties as very ample divisors*, **preprint.**

射影空間の低次数被覆空間を超平面切断として含む偏極多様体の分類

端緒 G. Castelnuovo [C2] (1890)

超楕円曲線 $C \to \mathbb{P}^1$ を超平面切断として含む射影曲面の分類問題

問題 1 (A. Lanteri-M. Palleschi-A. Sommese [LPS1, LPS2] (1992))

自然数 $d \geq 2$ に対し,

$\exists$ 非特異超平面切断 A s.t. $\exists$ d 次被覆 $\pi : A \longrightarrow \mathbb{P}^n$

をみたす (X^{n+1}, L) を分類せよ.

例 (“trivial pair”) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d))$, $(H_d, \mathcal{O}_H(1))$.

先行研究 (LPS (1992)) $n > d$ のとき,

$d = 2 \Rightarrow (X, L)$ は, trivial pair のみ [LPS2].

$d = 3 \Rightarrow$ non-trivial (X, L) は, $(Y_1, 3\mathcal{L})$ のみ [LPS1].

ただし, $(Y_1, \mathcal{L})$: del Pezzo 多様体, 次数 1.

$(\Leftrightarrow -K_Y = (\dim Y - 1)\mathcal{L}, (\mathcal{L}^{\dim Y})_Y = 1)$

$\boxed{\text{定理 1}}$ ([1]) (X, L) : 偏極多様体, 次元 $n+1 \geq 7 \ \Rightarrow$ TFAE:

(I) $\exists$ 非特異超平面切断 A s.t. $\exists$ 5次 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$.

(II) (X, L) は次のいずれかと同型:

(i) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(5))$; (ii) $(H_5, \mathcal{O}_H(1))$; (iii) $(Y_1, 5\mathcal{L})$;

(iv) $(W_{10}, \mathcal{O}_W(5))$, $W_{10} \subset \mathbb{P}(5, 2, 1^{n+1})$;

(v) $(W_{20}, \mathcal{O}_W(5))$, $W_{20} \subset \mathbb{P}(5, 4, 1^{n+1})$.

$\boxed{\text{定理 2}}$ ([2]) (X, L) : 偏極多様体, 次元 $n+1 \geq 6 \ \Rightarrow$ TFAE:

(I) $\exists$ 非特異超平面切断 A s.t. $\exists$ 4次 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$.

(II) (X, L) は次のいずれかと同型:

(i) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4))$; (ii) $(H_4, \mathcal{O}_H(1))$; (iii) $(Y_1, 4\mathcal{L})$;

(iv) $(W_{12}, \mathcal{O}_W(4))$, $W_{12} \subset \mathbb{P}(4, 3, 1^{n+1})$;

(v) $(H_2, \mathcal{O}_H(2))$; (vi) $(H_{2,2}, \mathcal{O}_H(1))$, $H_{2,2} \subset \mathbb{P}^{n+3}$;

(vii) $(Y_2, 2\mathcal{L})$, $(Y_2, \mathcal{L})$: del Pezzo 多様体, 次数 2.

Castelnuovo多様体を超平面切断として含む偏極多様体の分類

端緒 G. Castelnuovo [C1] (1889)

極大種数曲線 $C_d \subseteq \mathbb{P}^N$ (N, 次数 d : fix) の分類問題

定義 (藤田隆夫 [F] (1990))

$(A, \mathcal{H})$: Castelnuovo多様体 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 断面種数 g 極大 $(\Delta, d = (\mathcal{H}^n)_A : \mathrm{fix})$.

$$\Delta := n + d - h^0(A, \mathcal{H})$$

$$2g-2 := ((K_A+(n-1)\mathcal{H}).\mathcal{H}^{n-1})_A$$

例 $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$, $(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\text{Segre}}(1))$, $(H_d, \mathcal{O}_H(1))$, $(Gr(2,6), \mathcal{O}_{\text{Plücker}}(1))$.

問題 2 (網谷泰治 [3])

$\exists$ 非特異超平面切断 A s.t. $(A, \mathcal{H})$: Castelnuovo 多様体 $(\exists \mathcal{H})$

をみたす (X, L) を分類せよ.

注意 従来, C 多様体の構造自体は研究されてきたが,
この視点からの先行研究は知られていない.

注意

$$(X, L)\text{: C 多様体} \Rightarrow (A, L|_A)\text{: C 多様体}$$
$$\Rightarrow L|_A \cong \mathcal{H}$$

$L|_A \ncong \mathcal{H}$ となる (X, L) は存在するか?

定理 3 ([3]) (X, L): 偏極多様体, 次元 $n+1$, $n > d \geq 1 \Rightarrow$ TFAE:

(I) $\exists$ 非特異超平面切断 A s.t. $(A, \mathcal{H})$: C 多様体, 次数 d $(\exists \mathcal{H})$.

(II) (X, L) は次のいずれかと同型:

(1) $(W_d, \mathcal{O}(\ell))$, $W_d \subset \mathbb{P}(\ell, 1^{n+2})$, $\ell \mid d$.

(2) $(W_{2,d/2}, \mathcal{O}(\ell))$, $W_{2,d/2} \subset \mathbb{P}(\ell, 1^{n+3})$, $d \geq 4$, $\ell = 2$ or $\ell \mid d/2$.

(3) $(W_{2,2,2}, \mathcal{O}(\ell))$, $W_{2,2,2} \subset \mathbb{P}(\ell, 1^{n+4})$, $d = 8$, $\ell = 1, 2$.

さらに (1)–(3) において, $L|_A \cong \mathcal{H} \iff \ell = 1$.

重み付き完全交叉多様体ではない低次数 C 多様体を, 超平面切断として含む偏極多様体は存在しない.

低次数 C 多様体を超平面切断として含む偏極多様体は, 重み付き完全交叉多様体に限られる！

参考文献

[C1] **G. Castelnuovo,** *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, **Atti R. Accad. Sci. Torino 24 (1889), 196–223.**

[C2] **G. Castelnuovo,** *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sone curve iperellittiche*, **Rend. Circ. Mat. Palermo 4 (1890), 73–88.**

[F] **T. Fujita,** *Classification theories of polarized varieties*, **Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.**

[LPS1] **A. Lanteri, M. Palleschi and A. J. Sommese,** *On triple covers of $\mathbb{P}^n$ as very ample divisors*, **in** *Classification of algebraic varieties*, (*L'Aquila*, **1992), 277–292, Contemp. Math. 162 (1994), 277–292.**

[LPS2] **A. Lanteri, M. Palleschi and A. J. Sommese,** *Double covers of $\mathbb{P}^n$ as very ample divisors*, **Nagoya Math. J. 137 (1995), 1–32.**