早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

On projective manifolds with degenerate secant varieties

退化した割線多様体をもつ非特異射影多様体について

申　請　者

大野　真裕

Masahiro Ohno

数学専攻　代数幾何学研究

1996 年　5 月

本論文では退化した割線多様体をもつ非特異射影多様体の性質について調べる。

以下、基礎体 kは代数閉体であるとする。Xを $\mathbf{P}^N$内の非退化な（即ち、超平面に含まれていない）n 次元非特異射影多様体とする。$\operatorname{Sec} X$を Xのすべての割線の和集合の閉包とし、$\operatorname{Tan} X$を Xのすべての（$\mathbf{P}^N$内に埋め込まれた）接線の和集合とする。$\operatorname{Sec} X$を割線多様体 (secant variety) と呼び、$\operatorname{Tan} X$を接線多様体 (tangential variety) と呼ぶ。

一般に $\dim \operatorname{Sec} X \leq \min\{2n+1, N\}$ である。等号が成立しないとき、即ち、$\dim \operatorname{Sec} X < \min\{2n+1, N\}$ の時、$\operatorname{Sec} X$は退化しているという。同様に、一般に $\dim \operatorname{Tan} X \leq \min\{2n, N\}$ であるが、等号が成立しないとき、$\operatorname{Tan} X$は退化しているという。Fulton-Hansen の連結性定理より、$\operatorname{Tan} X$が退化していれば $\operatorname{Sec} X$も退化していることが知られている。

$X \subseteq \mathbf{P}^N$が接的退化しているとは、Xの一般的な点 x の ($\mathbf{P}^N$に埋め込まれた) 接空間 T_xX が、接点 x 以外に Xと交点を持つことをいう。本論文では、まず、接的退化と $\operatorname{Tan} X$の退化との関連を調べ、次のような関係を明らかにする。

命題 0.1 $\dim \operatorname{Tan} X \leq 2n-1$ ならば Xは接的退化である。

また、具体的に例を構成することによって、次の定理を示す。

定理 0.1 任意の $n \geq 9$ に対し、$\mathbf{P}^{2n+1}$内の n 次元非退化非特異射影多様体 Xで、$\dim \operatorname{Tan} X \leq 2n-1$ かつ、標準的直線束ω_Xが豊富になるものが存在する。

ω_Xが豊富ならば、Xの小平次元は非負である。小平次元が非負ならば、kの標数が 0 の時には、宮岡-森の定理より、Xは直線族で覆われることはないということがわかるので、命題 0.1と定理 0.1より、次の定理が得られる。

定理 0.2 kの標数が 0 の時、任意の $n \geq 9$ に対し、$\mathbf{P}^{2n+1}$内の n 次元非退化非特異射影多様体 Xで、直線族で覆われておらず、接的退化なものが存在する。

この定理は、Ciro Ciliberto の問題に肯定的な解答を与えている。

以下では更に基礎体 kの標数は 0 とする。$\operatorname{Sec} X$が退化しているならば、F. L. Zak の定理より、$\dim \operatorname{Sec} X \geq (3n+2)/2$ である。$\operatorname{Sec} X$が退化していて等号 $\dim \operatorname{Sec} X = (3n+2)/2$ が成立するような $X \subset \mathbf{P}^N$は、Severi 多様体と呼ばれる。その分類は最終的に Zak によって完成された。$\varepsilon = 2\dim \operatorname{Sec} X - (3n+2)$ とおく。$\operatorname{Sec} X$が退化しているとき、$\varepsilon = 0$ ということは Xが Severi 多様体ということに他ならない。$\varepsilon \geq 1$ の場合を本論文では調べる。

以下、$\operatorname{Sec} X$は退化しているとする。更に $\operatorname{Sm}(\operatorname{Sec} X)$ で $\operatorname{Sec} X$の smooth locus を表すとし、$\gamma : \operatorname{Sm}(\operatorname{Sec} X) \to G(\dim \operatorname{Sec} X, \mathbf{P}^N)$ を Gauss 写像 $u \mapsto T_u \operatorname{Sec} X$とする。

まず、γの像の次元についての次の命題を示す。

命題 0.2 ある整数定数 c $(0 \leq c \leq \varepsilon)$ が存在して、$\dim \operatorname{Im}(\gamma) = 2(\dim \operatorname{Sec} X - n - 1 - c)$ となる。

上記命題の定数 c は、Severi 多様体の拡張である Scorza 多様体については 0 となる。また、$c = 0$ となる多様体で Scorza 多様体でないものがある。更に、現在知られている $c > 0$ の例はすべて $c = 0$ のものから構成されている。よって本論文では $c = 0$ の場合、即ち、$\dim \operatorname{Im}(\gamma) = 2(\dim \operatorname{Sec} X - n - 1)$ の場合を更に調べる。

$u \in \operatorname{Sec} X$に対し、$Q_u = \{x \in X \mid \exists y \in X, x \neq y, u \in x * y\}$ の閉包（但し、$x * y$は x と y を通る $\mathbf{P}^N$内の直線を表す。）とし、$\theta_u = \{x \in X \mid u \in T_xX\}$ とする。Severi 多様体の場合の T. Fujita-J. Roberts の手法及び 3 次元の場合の Fujita の手法を、この場合に一般化することによって、次が得られる。

定理 0.3 $\dim \operatorname{Im}(\gamma) = 2(\dim \operatorname{Sec} X - n - 1)$ ならば、Xは有理的に連結である。更に、

1) $\dim \operatorname{Sec} X = 2n$ の時、$\operatorname{Sec} X$の一般的な点 u に対し、Q_uは非特異 2 次曲線であって、$K_X.Q_u = -n-1$ である。

2) $\dim \operatorname{Sec} X = 2n-1$ の時、$\operatorname{Sec} X$の一般的な点 u に対し、θ_uは非特異 2 次曲線であって、$K_X.\theta_u = -n-2$ である。

3) $\dim \operatorname{Sec} X \leq 2n-2$ の時、$n + \dim \operatorname{Sec} X \equiv 0 \pmod 2$ 即ち、$n + \varepsilon \equiv 0 \pmod 4$ であって、$K_X \cong \mathcal{O}_X((-3n+\varepsilon)/4)$ となる。従って特に Xは *Fano* 多様体である。

4) $\dim \operatorname{Sec} X \leq 2n-4$ の時、$n + \dim \operatorname{Sec} X \equiv 0 \pmod 4$ 即ち、$n + \varepsilon \equiv 0 \pmod 8$ であって、$c_2(\Omega_X) = (1/32)(9n^2 - (8+6\varepsilon)n + 32 + 8\varepsilon + \varepsilon^2)c_1(\mathcal{O}_X(1))^2$となる。

Xの次元 n のとり得る値については、Severi 多様体の場合の H. Tango の手法をこの場合に修正して適用することによって、更に詳しく次の定理が得られる。

定理 0.4 $\dim \operatorname{Im}(\gamma) = 2(\dim \operatorname{Sec} X - n - 1)$ とする。すると Xの次元 n のとり得る値は

1) $\varepsilon = 1$ の時、*a)* $3, 5, 7, 15$ か、または *b)* $2^m - 1$ $(m \geq 7)$, $2^m \cdot 3 - 1$ $(m \geq 5)$;

2) $\varepsilon = 2$ の時、*a)* $4, 6, 10, 14$ か、または *b)* $2^m - 2$ $(m \geq 7)$, $2^m \cdot 3 - 2$ $(m \geq 5)$;

3) $\varepsilon = 3$ の時、*a)* $5, 7, 9, 13$ か、または *b)* 21, $2^m - 3$ $(m \geq 7)$, $2^m \cdot 3 - 3$ $(m \geq 5)$;

4) $\varepsilon = 4$ の時、*a)* $6, 8, 12$ か、または *b)* $20, 28$, $2^m - 4$ $(m \geq 7)$, $2^m \cdot 3 - 4$ $(m \geq 5)$;

5) $\varepsilon = 5$ の時、*a)* $7, 9, 11$ か、または *b)* $19, 27$, $2^m - 5$ $(m \geq 7)$, $2^m \cdot 3 - 5$ $(m \geq 5)$.

$\varepsilon = 0$ の時、Xの次元 n のとり得る値は $2, 4, 8, 16$ に限るのであった。また、上記定理において、b) の場合の各次元に対して例は現在までのところ知られていない。

以下では $\dim \operatorname{Sec} X = 2n-2,\ 2n-1,\ 2n$ のそれぞれの場合に、次元 n の比較的小さい多様体について調べ、それらを分類する。ここでは偏極多様体の理論が活用される。

まず、$\dim \operatorname{Sec} X = 2n-2$ の場合は、Zak の定理から $n \geq 7$ となる。更に $n = 7$ の場合には、定理 0.3 (3) から Xが余指数 3 の Fano 多様体であることがわかるので、余指数 3 の Fano 多様体の分類から次が得られる。

定理 0.5 $\dim \mathrm{Sec}\, X = 2n-2$ とする。更に $n=7$ で $\dim \mathrm{Im}(\gamma) = 8$ ならば、X は、プリュッカー埋め込みで $\mathbf{P}^{14}$ に埋め込まれたグラスマン多様体 $G(1, \mathbf{P}^5)$ の非特異な超平面切断になる。

次に $\dim \mathrm{Sec}\, X = 2n-1$ とする。すると $n \geq 4$ である。$n=4$ の時は X は Severi 多様体であり、$(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2, \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1))$ となることがわかっていた。そこで、$n \geq 5$ について $c=0$ という仮定のもとで調べる。特に $n=5$ と 6 の場合には次の様にその構造が決定される。

定理 0.6 $\dim \mathrm{Sec}\, X = 2n-1$ とする。更に $\dim \mathrm{Im}(\gamma) = 2(\dim \mathrm{Sec}\, X - n - 1)$ とする。この時、

$n=5$ ならば、$(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^3, \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1))$.

$n=6$ ならば、$(X, \mathcal{O}_X(1))$ は次のいずれか。

1) $(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}^l \times \mathbf{P}^{6-l}, \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1))$ $(l = 2, 3)$;

2) $X \subset \mathbf{P}^N$ は、$G(1, \mathbf{P}^5) \subset \mathbf{P}^{14}$ と $\mathbf{P}^{14}$ の余次元 2 の線形部分空間との非特異完全交叉。

最後に $\dim \mathrm{Sec}\, X = 2n$ とする。すると $n \geq 2$ である。$n=2$ の時は X は Severi 多様体であり、$(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(2))$ となり、$n=3$ の時は、Fujita により、$c=0$ となり、$(X, \mathcal{O}_X(1))$ は $(\mathbf{P}_{\mathbf{P}^l}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 3-l} \oplus \mathcal{O}(2)), \mathcal{O}(1))$ $(l=2,3)$ か、$(\mathbf{P}_{\mathbf{P}^2}(T_{\mathbf{P}^2}), \mathcal{O}(1))$ となることがわかっていた。そこで、$n \geq 4$ についても $c=0$ という仮定のもとで調べ、特に $n=4$ と 5 の場合には次の様な分類結果を得る。

定理 0.7 $\dim \mathrm{Sec}\, X = 2n$ とする。更に $\dim \mathrm{Im}(\gamma) = 2(\dim \mathrm{Sec}\, X - n - 1)$ とする。この時、

$n=4$ ならば、$(X, \mathcal{O}_X(1))$ は次のいずれか。

1) $(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}_{\mathbf{P}^l}(\mathcal{O}(1)^{\oplus(4-l)} \oplus \mathcal{O}(2)), \mathcal{O}(1))$ $(l = 2, 3, 4)$;

2) $(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}_{\mathbf{P}^2}(\mathcal{O}(1) \oplus T_{\mathbf{P}^2}), \mathcal{O}(1))$.

$n=5$ ならば、$(X, \mathcal{O}_X(1))$ は次のいずれか。

1) $(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}_{\mathbf{P}^l}(\mathcal{O}(1)^{\oplus(5-l)} \oplus \mathcal{O}(2)), \mathcal{O}(1))$ $(l = 2, 3, 4, 5)$;

2) $(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\mathbf{P}_{\mathbf{P}^l}(\mathcal{O}(1)^{\oplus(6-2l)} \oplus T_{\mathbf{P}^l}), \mathcal{O}(1))$ $(l = 2, 3)$;

3) $X \subset \mathbf{P}^N$ は、$G(1, \mathbf{P}^5) \subset \mathbf{P}^{14}$ と $\mathbf{P}^{14}$ の余次元 3 の線形部分空間との非特異完全交叉;

4) $(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong (\Sigma_{10}, \mathcal{O}(1))$, ここで、$\Sigma_{10}$ は例外型単純代数群 G_2 の随伴多様体。

定理 0.6 と定理 0.7 は A. J. Sommese 等による随伴理論等を用いて示される。