早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Frobenius action on singularities and tight closure
（フロベニウス写像の特異点への作用とタイト・クロージャー）

申 請 者
原 伸生
Nobuo Hara

数理科学専攻 代数幾何学研究

1996年 7月

本論文の研究目的は, 正標数の可換環のフロベニウス写像と "tight closure" の概念を用いて定義される F-rational, F-regular, F-pure 等の環論的性質の幾何的な把握, とりわけ, これらと（標数 0 の）代数多様体における有理特異点, 対数的末端特異点, 対数的標準特異点等の特異点の性質の相互関係を研究することである.

本論文は 4 章から構成される. 第 1 章では, Demazure の方法により構成されたある正規次数環が F-regular, あるいは F-pure となる条件について調べ, 判定法を与える. 第 2 章では, 2 次元の F-regular 及び F-pure な特異点を, その特異点解消のグラフを用いてすべての標数 $p>0$ で分類する. 第 3 章では, 次数環の斉次パラメーター・イデアルの tight closure を記述するために "F-injective in negative degree" の概念を定義し, この性質が成立するための条件をそれぞれ完全交叉及び 2 次元の正規次数環に対して調べ, さらに 2 次元の F-rationality の判定に応用する. 第 4 章では, 未解決であった予想「有理特異点 ⇒ F-rational」及び「対数的末端特異点 ⇒ F-regular」に対する肯定的な解答を与える.

まず, いくつかの基本概念の定義を述べる. R を標数 $p>0$ の可換環, I をそのイデアルとし, I の元の $q=p^e$ 巾たちで生成されるイデアルを $I^{[q]}$ と書く. また, R の極小素イデアルに含まれない元の全体を R^0 で表す. I の *tight closure* とは, $I^* := \{x \in R \mid \exists c \in R^0$ s.t. $cx^q \in I^{[q]}$ for $q=p^e \gg 0\}$ で定義される R のイデアル I^* のことをいう. 一般に $I \subseteq I^*$ であるが, $I=I^*$ となるとき $I \subset R$ は *tightly closed* であるといい, R のすべてのイデアルが tightly closed のとき, R は *F-regular* であるという. また, R のすべての局所環のパラメーター・イデアルが tightly closed であるとき, R は *F-rational* であるという. 一方, R のフロベニウス写像が有限射のとき, もしそれが分裂単射であれば, R は *F-pure* であるといわれる.

F-rational, F-regular, F-pure な可換環は, 代数幾何学においてよく知られている有理特異点, 対数的末端特異点, 対数的標準特異点とそれぞれ類似した性質をもつことが調べられてきている.

次に, 各章の概要について述べる.

第 1 章における考察の主対象は, 標数 $p>0$ の完全体 k 上定義された正規次数環の F-regularity と F-purity である. 一般に正規次数環 R は $X=\mathrm{Proj}R$ 上の有理係数 Cartier 因子 D による Demazure 表現

$$R = R(X,D) = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))T^n$$

をもつ. 以下ではさらに次の条件を仮定する:

(†) X は斉次式 $g_1,\ldots,g_t$ で定義された標数 $p>0$ の射影空間 $\mathbf{P}_k^N$ 内の完全交叉多様体, $D=((a-1)/a)\cdot V$ とする. ここに, $V \subset X$ は斉次式 f で定義される超曲面による X の切断であるとする.

(†) における $\mathbf{P}^N$ の斉次座標環を $S=k[x_0,\ldots,x_N]$ とするとき, 得られた判定法は:

定理. $r_e := [p^e(a-1)/a]$ とおくとき

(i) $R=R(X,D)$ が F-pure $\iff$ $f^{r_1}(g_1\cdots g_t)^{p-1} \notin (x_1^p,\ldots,x_N^p)$ in S.

(ii) R が strongly F-regular $\iff$ $\bigcap_{q=p^e}(x_1^q,\ldots,x_N^q) : f^{r_e}(g_1\cdots g_t)^{q-1} = (g_1,\ldots,g_t)$.

命題. 仮定 (†) でさらに V が正則で, そのヤコビアン・イデアル $J \subset S$ がある $m>0$ に対し $(x_1,\ldots,x_N)^m$ を含むとき, 不等式

$$\frac{a-1}{a}\deg(f) < N+1-\sum_{i=1}^{t}\deg(g_i)$$

が成り立てば, $R=R(X,D)$ が strongly F-regular か, さもなくば, $p<(N-t+1)am$.

第 2 章では, 2 次元の局所環の F-regularity と F-purity についてより詳しく調べる. Mehta–Srinivas によれば, F-pure な 2 次元正規特異点は, (a) 例外集合が ordinary な単純楕円型特異点, (b) カスプ特異点, (c) 有理特異点, のうちいずれかであり, 逆に, (a) または (b) であれば F-pure である. しかしながら, 有理特異点であることは F-pure であるための十分条件ではなく, (c) の場合の F-pure 特異点の分類の問題が残っていた. 以上をふまえて 2 次元正標数の有理特異点で, F-pure 及び F-regular であるものたちの特異点解消の例外集合の双対グラフと標数 p とによる分類を試みる.

$A=\mathcal{O}_{Y,y}$ を標数 $p>0$ の 2 次元正規特異点 (Y,y) の局所環, $f\colon X \to Y=\mathrm{Spec}A$ をその最小特異点解消とする. f の例外集合の双対グラフ Γ が星型で r 本の枝をもつとき, 各枝に対して自然数 $d=(-1)^l\Delta$（l は枝の長さ, Δ は枝の交点行列の行列式）を対応させ, これらの自然数の組 $(d_1,\ldots,d_r)$ を星型グラフの型とよぶ. このとき

定理. A が F-regular であるための必要十分条件は, (Y,y) が有理特異点をもち, かつ次のいずれかが成り立つことである:

(i) グラフ Γ が鎖型.

(ii) Γ が $(2,2,d)$ 型 $(d\geq 2)$ の星型グラフで, $p\neq 2$.

(iii) Γ が $(2,3,3)$ 型または $(2,3,4)$ 型の星型グラフで, $p>3$.

(iv) Γ が $(2,3,5)$ 型の星型グラフで, $p>5$.

定理. (Y,y) が有理特異点とする. A が F-pure ならば次のいずれかが成り立つ:

(i) A は F-regular.

(ii) A は有理 2 重点.

(iii) Γ が $(3,3,3)$ 型または $(2,3,6)$ 型の星型グラフで, $p\equiv 1 \pmod 3$.

(iv) Γ が $(2,4,4)$ 型の星型グラフで, $p\equiv 1 \pmod 4$.

(v) Γ が $(2,2,2,2)$ 型の星型グラフ, p が奇素数で, さらにグラフの中心曲線上の各枝との交点を 2 重被覆の分岐点としてもつ楕円曲線が ordinary.

(vi) Γ が ${}_*\tilde{D}_n$ 型 $(n\geq 5)$ で, $p\neq 2$.

逆に, (i), (iii), (iv), (v), (vi) の場合, A は F-pure となり, (ii) の場合も定義方程式の分類を用いて F-pure になるものとそうでないものが判別できる.

第 3 章では, 次数環の斉次パラメーター・イデアルの tight closure を記述するために, 次の概念を定義する.

定義. Rを標数 $p>0$ の完全体上定義された d 次元次数環とする. 局所コホモロジー $H^2_{R_+}(R)$ の次数部分にひきおこされるフロベニウス写像 $F_n\colon [H^2_{R_+}(R)]_n \to [H^2_{R_+}(R)]_{pn}$ が各 $n<0$ で単射のとき, R は *F-injective in negative degree* であるという.

この性質は tight closure の計算に対して重要である: R が F-injective in negative degree ならば, その斉次パラメーター・イデアル I の tight closure は, R の次数付けを使っ

て, $I^* = I + \bigoplus_{n \geq n_0} R_n$ (n_0 は I を生成する斉次パラメーターの次数の和) と表される.

したがって問題は, R がいつ F-injective in negative degree かだが, まず次を示す.

定理. $R = k[X_1, \dots, X_r]/(f_1, \dots, f_t)$ を標数 $p > 0$ の完全体 k上定義された $N-r$次元完全交叉次数環とし, そのヤコビアン・イデアル $J \subset k[X_1, \dots, X_r]$ がある $k_1, \dots, k_r \in \mathbf{N}$ に対しイデアル $(X_1^{k_1}, \dots, X_r^{k_r})$ を含むとする. このときもし不等式 $p \geq \sum_{i=1}^{r} k_i \deg X_i$ が成り立てば R は F-injective in negative degree.

次に, R を標数 $p > 0$ の 2 次元の正規次数環とする. このとき Fedder は, $p \gg 0$ ならば R が F-injective in negative degree であることを implicit にみているが, 彼の方法では "$p \gg 0$" というのが実際にはどの位大きければよいか知るのは難しい. そこで R がどのような p から F-injective in negative degree となるかについての具体的な条件を R の Demazure 表現 $R = R(X, D)$ を利用して調べ, さらには R が F-rational であるための同値条件をも求める. 以下では $R = R(X, D)$ は 2 次元とし, K_X を正則曲線 X の標準因子とする. また, 因子の整数部分を記号 [ ] で表し, D の "分数部分"を D' と書く.

定理. 上の記号で, 因子 $B_n := -p[nD] + [pnD]$ の被約部分を $(B_n)_{\mathrm{red}}$ と書くとき, もし $\deg(K_X + (B_n)_{\mathrm{red}} + [pnD]) < 0$ ならば, 写像 F_n は単射. とくに, 不等式 $p \deg D > \deg(K_X + D')$ が成り立てば, $R = R(X, D)$ は F-injective in negative degree.

定理. R が F-rational であるための必要十分条件は次の (a), (b) が成り立つこと:

(a) R が有理特異点, i.e., $X \cong \mathbf{P}^1$ かつ, 任意の $n > 0$ に対し, $\deg[nD] > -2$.

(b) 任意の正整数 n に対し, $\deg((B_n)_{\mathrm{red}} + [-pnD]) < 2$ が成り立つ.

第 4 章では, F-rational な環と有理特異点との対応を証明する. "F-rational" という概念は, その言葉通り, 有理特異点 (rational singularity) に対応するべきものとして, Fedder–渡辺によって定義され, Smith は「F-rational $\Rightarrow$ 有理特異点」が成り立つことを証明した. しかしながら「rational $\Rightarrow$ F-rational」の方向は, 標数 p が小さいときには成り立たないという「病理的現象」が困難となって, 一般には未解決のままで, tight closure の理論における重要な問題の一つと考えられてきた. 第 4 章の主定理は, 一般の場合にこの問に対する肯定的な解答を与える.

結果を述べるために, 所謂 "modulo p reduction"を使って "F-rational"という概念を標数 0 に拡張する. Rが標数 0 の体 k上有限生成な環のとき, それを "生成ファイバー"にもつ有限生成 $\mathbf{Z}$ 代数上の flat family を考えると, この family の閉ファイバーは正標数をもつ. この family の一般の閉ファイバー環が F-rational であるとき, R は *F-rational type* であるという.

定理. R を標数 0 の体上有限生成な環とする. Spec$R$ が有理特異点をもつならば, R は F-rational type である.

これにより, F-rationality と有理特異点の対応が結論づけられた. 一方, 渡辺は, 同様の意味において, 「F-regular type かつ $\mathbf{Q}$-Gorenstein $\Rightarrow$ 対数的末端特異点」を証明しているが, 上の定理を使って, この逆が成り立つことも示される:

定理. R を標数 0 の体上有限生成な環とする. Spec$R$ が対数的末端特異点をもつならば, R は F-regular type である.