早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Spectral sequence theory for generalized Cohen-Macaulay graded modules

一般CM次数加群のスペクトル系列理論

申 請 者

宮 崎 誓

Chikashi Miyazaki

平成 5 年 10月

本論文で対象とするのは，次数環と次数加群である。次数環Rとは，Rが単位元1を持つ可換環であり，加法群として $R=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}R_i$ となり，任意の i, j に対して $R_i R_j \subset R_{i+j}$ を満たすものをいう。また，次数R加群Mとは，加法群として $M=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ となり，任意の i, j に対して $R_i M_j \subset M_{i+j}$ を満たすものをいう。

さらに，本論文では次を仮定する。次数環Rは（N型の）無限体K上の有限生成代数であるとする。しかしRがK上 R_1 の元で生成されることは仮定しない。Rの斉次極大イデアルをmとおく。また，次数R加群MはR上有限生成加群であることを常に仮定し，$\dim M = d \geqq 1$ とする。

本論文では，次数環Rあるいは次数R加群Mの環論的性質を研究する。その中で，我々が問題とするのは，Buchsbaum 性である。この概念は，Cohen-Macaulay 性の一般化として導入され，Goto, Schenzel, Shimoda, Stückrad, Suzuki, Trung, Vogelらにより研究されてきた。我々の前論文では，次数加群の Buchsbaum 性をスペクトル系列により，特徴付けをした。その論文では，r-Buchsbaum という概念を導入し，RがK上 R_1 の元で生成されるという仮定のもとで，適当なスペクトル系列の退化により，r-Buchsbaum を特徴付けた。ここで，Mが r-Buchsbaum であるとは，任意の $i\ (\leq r-1)$ と任意のMのパラメータ系の一部（以下，s.s.o.p.と書く）$x_1,\ldots,x_i$ に対して，$M/(x_1,\ldots,x_i)M$ が quasi-Buchsbaum のときにいう。よって，1-Buchsbaum とは quasi-Buchsbaum のことであり，d-Buchsbaum とは Buchsbaum のことである。その後，この概念は Hoa, Mirò-Roig, Vogelらにより (k,r)-Buchsbaum という概念に一般化され，Castelnuovo-Mumford regularityの上限を見つける問題に応用された。一方，Buchsbaum 性の研究は，Suzuki や Trung らにより，generalized Cohen-Macaulay という，より広い枠組みの中でパラメータ系（以下，s.o.p.と書く）が standard であるかどうかの議論を通して，Buchsbaum 性の特徴付けを押し進めて発展してきた。

本論文の目的は，r-standard s.s.o.p. という概念を新しく導入し，それに対するスペクトル系列理論を展開することである。この理論は，我々の前論文での r-Buchsbaum についての結果の一般化になっている。後述の定理2が主定理であり，本論文の大半はこの証明に費やされる。前論文では，element-wiseな証明が主だったが，ここでは，理論や証明をファンクトリアルに構成している。そのことによって，より一般的な結果が得られ，合わせて幾つかの興味深い系も導いている。

本論文で扱う次数R加群Mは常に generalized Cohen-Macaulay，即ち，

$$\ell_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) < \infty \qquad (i \neq d)$$

であると仮定する。さて，r-standard の定義をしよう。

<u>定義1</u>　rを $1 \leqq r \leqq n$ を満たす整数とする。また，$x_1,\ldots,x_n\ (\in \mathfrak{m})$ をMの s.s.o.p. とする。$x_1,\ldots,x_n$ が r-standard s.s.o.p. であるとは，$x_1,\ldots,x_n$ の中から任意に選んだ $y_1,\ldots,y_k\ (k \leqq r-1)$ に対して，

$$(x_1,\ldots,x_n)H_{\mathfrak{m}}^j(M/(y_1,\ldots,y_k)M) = 0 \qquad (j+k \leqq d-1)$$

が成り立つときにいう。また，$I \subset \mathfrak{m}$ がMの r-standard イデアルであるとは，Iに含まれる任意のMの s.s.o.p. が r-standard になるときにいう。

上の定義で，mがMの r-standard イデアルであることは，Mが r-Buchsbaum 加群であることと同値であることがわかる。

次に，スペクトル系列を構成しよう。さて，$X=\mathrm{Proj}\ R$ とおき，X上で $\mathcal{F}=\widetilde{M}$ とする。また，$\mathcal{U}$ をXのアファイン開被覆とする。$C^\bullet$ を Čech 複体 $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}C^\bullet(\mathcal{U};\mathcal{F}(k))$ とおく。そこで，$L^\bullet = (0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} C^\bullet[-1])$ とおく。ただし，ε は自然な射である。ここで，$H^i(L^\bullet) = H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ であることに注意する。一方，mの斉次元 $x_1,\ldots,x_n$ に対して，Koszul複体 $K_\bullet := K_\bullet(x_1,\ldots,x_n;R)$ をとる。このようにして，二重複体 $B^{\bullet\bullet} := \mathrm{Hom}_R(K_\bullet, L^\bullet)$ が構成される。この二重複体に対して，フィルター付け $F_i = \Sigma_{p\geqq i}B^{p,q}$ によるスペクトル系列 $\{F_r^{p,q}\}$ を考えると，次の定理を得る。

<u>定理2</u>　RをK上の次数環とし，Mを次数R加群で，$\dim M = d \geqq 1$ とする。Rの斉次元 $x_1,\ldots,x_n\ (\in \mathfrak{m})$ に対して，$I=(x_1,\ldots,x_n)$ とおく。$x_1,\ldots,x_n$ より任意に選んだ $y_1,\ldots,y_r\ (r \leqq n)$ がMの (r-1)-standard s.s.o.p.であると仮定する。このとき，次は同値である。

(1)　Iは，Mの r-standard イデアルである。

(2)　$d_s^{p,q}: F_s^{p,q} \longrightarrow F_s^{p+s,q-s+1}\quad (s \leqq r,\ q < d)$ は零射である。

(3)　$d_s^{p,q}: F_s^{0,q} \longrightarrow F_s^{s,q-s+1}\quad (s \leqq r,\ q < d)$ は零射である。

この定理の応用として，r-standard の判定法を幾つか得た。次の結果は，Goto-Watanabe, Stückrad-Vogel の次数加群についての Buchsbaum判定法の一般化になっている。

<u>系 3</u> 次数R加群Mに対して，$I=(x_1,\ldots,x_n)$ は斉次イデアルで，この $x_1,\ldots,x_n$ の中から任意に選んだ $y_1,\ldots,y_r$ は，Mの s.s.o.p. になるとする。また，すべての j に対して，$\deg x_j = e_j\ (\geq 1)$ とおく。ここで，

$$S(M)=\{(i,k)\ ;\ [H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_k \neq 0,\ 0 \leq i < d\}$$

と定義する。S（M）が次の（＊）を満たせば，I はMの r-standard イデアルになる。

（＊） S（M）の任意の元 (i,k)，(j,h)（ただし，$i \geq j$）および，任意の $i-j+1$ 個の整数 $1 \leq a(1) < \ldots < a(j\text{-}k\text{+}1) \leq n$ に対して，

$$h-k \neq \sum_{u=1}^{j-k+1} e_{a(u)}$$

が成り立つ。

また，次の結果は Bass numberによる Buchsbaum判定法である。我々の前論文や Yamagishiの結果を一般化している。

<u>系 4</u> $I=(x_1,\ldots,x_n)$ が m－準素イデアルで，この $x_1,\ldots,x_n$ の中から任意に選んだ $y_1,\ldots,y_r$ は，Mの s.s.o.p. になるとする。すると，次の(1)－(3)は同値である。また，I が r-standard イデアルのとき，(1)－(3)は成立する。逆に，$r=d$ のとき(1)－(3)が成立すれば，I は d-standard イデアルである。

(1) $0 \leq i \leq r-1$ に対して，自然な射

$$H^i(x_1,\ldots,x_n\ ;\ M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)$$

は全射である。

(2) $0 \leq i \leq r-1$ に対して，

$$\ell_R(H^i(x_1,\ldots,x_n\ ;\ M)) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \ell_R(H^{i-j}_{\mathfrak{m}}(M))$$

が成り立つ。

(3) 上の(2)が $i=r-1$ のとき成立する。即ち，

$$\ell_R(H^{r-1}(x_1,\ldots,x_n\ ;\ M)) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} \ell_R(H^{r-1-j}_{\mathfrak{m}}(M))$$

が成り立つ。